المراجعة النهائية

لطلبة الثانوية

فى

الاستاتيكا

اولا : نصائح عامة

١) أجعل الصفحة الاولى للمسودة وليس الاخيرة حتى تواجه المصحح أولا لأنها تصحح
٢) بعد المسودة اقلب الصفحة فيكون عندك صفحتين متقابلتين لحل السؤال الأول موضوعى وهو إجبارى لابد من حله
٣) بعد ذلك كل صفحتين متقابلتين للفقرة (أ) والصفحة المقابلة للفقرة (ب)
٤) الأسئلة الثانى والثالث والرابع والخامس أختيارى مطلوب حل ثلاثة أسئلة
٥) بعد تجهيز ورقتك ابدأ فى قراءة ورقة الاسئلة جيدا وجاوب على فقرات السؤال الاول
٦) تحديد الاسئلة التى ترغب فى إجابتها ولا تبدأ فى السؤال إلا إذا كنت تعرفه كله حتى لاتضيع الوقت
٧) جاوب على الفقرات التى تعرفها اولا ووضعها فى المكان المحدد له
٨) لاتأخذ خط لتقفل إجابة أى فقرة واذا كنت تريد ان تضيف معلومة مباشرة أحذرك أن تكتب إجابة اخرى فى الورقة ولكن اجعل اجابتك الاخرى أسفل الاجابة الأولى دون أن تشير اجابة اخرى
٩) بعد انتهائك من الفقرات التى حلتها فكر فى الفقرات التى تركتها وأقرأ الفقرة جيدا وأكتب كل ماتعرفه فى تلك الفقرة وما أتراك قد قد يكون صحيحا أفضل مما تركته
١٠) وأخيرا تأكد من أنك جاوبت على كل الفقرات
١١) راجع جيدا ولا تنشغل بأى شئ فالزمن ساعتين فقط

ثانيا : نصائح خاصة

لكل فرع قوانينه اقرأ الفقرة جيدا وافهمها فانه يوجد قانون لحل هذه الفقرة وإن شككت فى فى القانون وأختلط عليك الأمر فى قانونين ايهما تستخدم اكتب الحلين وبدون فاصل هذا إذ لم تكن متأكد فربما يكون أحدهما صح اما إذا تأكدت من القانون فسير على بركة الله وربنا يوفقكم جميعا

مع أرق امنياتى لكم بالتوفيق والنجاح الباهر

الأستاذ / عادل ادوار

موجه أول رياضيا

الجزء النظرى

فإذا وضعت كرة على نضد فإنها تؤثر بقوة الفعل ، و النضد يؤثر عليها بقوة رد الفعل
و تكون هاتين القوتين متساويتين فى المقدار و متضادتين فى الإتجاه
و يلاحظ أن : هاتين القوتين لا تؤثران فى جسم واحد فالفعل يؤثر فى النضد
و رد الفعل يؤثر فى الكرة

ر

قوة الإحتكاك " ح " :

هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن

ملاحظات :

* رد الفعل فى حالة السطوح الملساء يكون عمودياً على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين
* رد الفعل فى حالة الأجسام الخشنة له مركبتين أحداهما
موازية لسطح التماس هى قوة الإحتكاك و الأخرى
عمودية على سطح التماس هى قوة رد الفعل العمودى

رد الفعل العمودى
رد الفعل المحصل
الإحتكاك

قوة الإحتكاك النهائية " ك " :

هى القيمة النهائية لمقدار قوة الإحتكاك و التى عندها يكون الجسم على وشك الحركة
أو متحرك و نقطة نهايته مع موضع الجسيم

معامل الإحتكاك " م " :

هو النسبة بين مقدارى قوة الإحتكاك النهائى " ك " و رد الفعل العمودى " ر "

أى أن : م $= \frac{ك}{ر}$ و بالتالى فإن : ك = م ر

ر
ك
ش
و

ملاحظة :

المتساوية ك = م ر تتحقق فقط عند الإحتكاك النهائى
و هى أقصى قيمة يمكن أن يصل إليها مقدار قوة الإحتكاك
أى أن : عندما يكون الجسم على وشك الحركة أو متحركاً بالفعل يكون : ح $\leqslant$ م ر

زاوية الإحتكاك :

هى الزاوية المحصورة بين خطى عمل رد الفعل العمودى و رد الفعل المحصل

" عندما يصبح الإحتكاك نهائى فإن :

طا ل $= \frac{ك}{ر}$ = م

رد الفعل العمودى
رد الفعل المحصل
ل
الإحتكاك

إتزان جسم على مستو أفقى خشن :

بفرض أن جسم وزنه " و " متزن على مستو أفقى خشن

و تؤثر عليه قوة مقدارها ق و تميل على الأفقى بزاوية قياسها " هـ " فإن :

ح = ق حتا هـ ، ر + ق حا هـ = و

ملاحظات :

- عندما يكون الجسم ملامساً للمستوى فإن :

  ر > ٠ ، و > ق حا هـ

- عندما يكون الجسم على وشك الحركة تحت تأثير القوة فإن :

  ح = ك = م ر و بالتالى يكون :

  م ر = ق حتا هـ ، ر + ق حا هـ = و

- إذا كانت ق أفقية نضع هـ = ٠ فى العلاقات السابقة

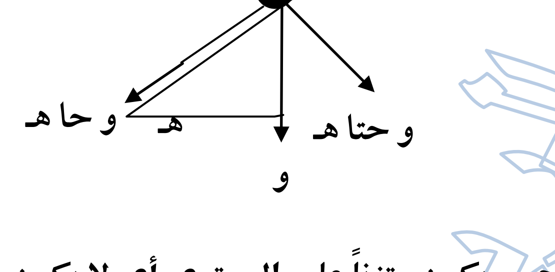


إتزان جسم على مستو مائل خشن:

بفرض أن جسم وزنه " و " متزن على مستو مائل خشن يميل على الأفقى

بزاوية قياسها هـ فإن :

ح = و حا هـ ، ر = و حتا هـ



ملاحظات :

- إذا كان الجسم على وشك الإنزلاق فإن :

  م ر = و حا هـ ، ر = و حتا هـ

  و بالتالى فإن : م = طا هـ

إذا كان قياس زاوية ميل المستوى > قياس زاوية الإحتكاك فإن الجسم يكون متزناً على المستوى أى لا يكون الإحتكاك نهائى و ليكون الإحتكاك نهائى نؤثر على الجسم بقوة فى إتجاه خط أكبر ميل إلى أسفل تجعله على وشك الحركة لأسفل أو

نؤثر على الجسم بقوة فى إتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى تجعله على وشك الحركة لأعلى

- إذا كان قياس زاوية ميل المستوى > قياس زاوية الإحتكاك فإن الجسم لا يكون متزناً " ينزلق " على المستوى و ليكون الإحتكاك نهائى نؤثر على الجسم بقوة فى إتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى بحيث تكون القوة كافية لمنعه من الإنزلاق لأسفل أو نؤثر على الجسم بقوة فى إتجاه خط أكبر ميل إلى أسفل بحيث تكون القوة كافية لمنعه من الإنزلاق لأسفل

- إذا الجسم على وشك الحركة لأسفل فإن إتجاه م ر يكون لأعلى

و إذا الجسم على وشك الحركة لأعلى فإن إتجاه م ر يكون لأسفل

العـــــــــــزوم

مفاهيم أساسية : (نعلم أن)

* **الكمية المتجهة :** هى الكمية التى تتعين بمعرفة مقدارها و إتجاهها

مثل : الإزاحة ، السرعة ، العجلة ، القوة

* **الكمية القياسية :** هى الكمية التى تتعين بمعرفة مقدارها   مثل : الزمن ، الكتلة ، الحجم

* معيار المتجه : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ متجه فإن مقداره يسمى معيار المتجه و يرمز بالرمز أ أو $\| \overleftarrow{\text{أ}} \|$

* **يمكن تمثيل المتجه هندسياً** بقطعة مستقيمة موجهة بحيث يكون طولها ممثلاً لمعيار المتجه " وفق مقياس رسم مناسب " و إتجاهها هو إتجاه المتجه

* **متجه الموضع لنقطة معلومة :**

إذا كانت أ = (أ_1 ، أ_2) وفق نظام إحداثى متعامد فيه :

$\overleftarrow{\text{س}}$ متجه وحدة أساسى " متجه تمثله قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها نقطة الأصل " و " لنظام إحداثى متعامد و معياره الوحدة فى إتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجه وحدة أساسى " متجه تمثله قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها نقطة الأصل " و " لنظام إحداثى متعامد و معياره الوحدة فى إتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

فإن : $\overleftarrow{\text{و أ}}$ " أ " يسمى متجه الموضع لنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل " و "

، يسمى أ_1 المركبة الجبرية للمتجه و $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى إتجاه $\overleftarrow{\text{س}}$

، يسمى أ_2 المركبة الجبرية للمتجه و $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى إتجاه $\overleftarrow{\text{ص}}$

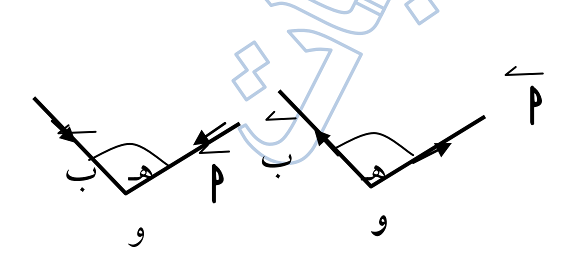
* إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_1 ، \text{أ}_2) = \text{أ}_1 \overleftarrow{\text{س}} + \text{أ}_2 \overleftarrow{\text{ص}}$ فإن : $\text{أ} = \sqrt{\text{أ}_1^2 + \text{أ}_2^2}$

* إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = \text{أ}_1 \overleftarrow{\text{س}} + \text{أ}_2 \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = \text{ب}_1 \overleftarrow{\text{س}} + \text{ب}_2 \overleftarrow{\text{ص}}$ وكان :

* $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}} = (\text{ب}_1 - \text{أ}_1) \overleftarrow{\text{س}} + (\text{ب}_2 - \text{أ}_2) \overleftarrow{\text{ص}}$

* $\overleftarrow{\text{أ}} \,//\, \overleftarrow{\text{ب}}$ فإن : $\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1 = \text{صفر}$

* $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{ب}}$ فإن : $\text{أ}_1 \text{ب}_1 + \text{أ}_2 \text{ب}_2 = \text{صفر}$

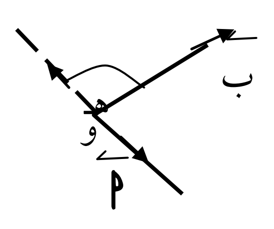


* **الزاوية بين متجهين :**

هى الزاوية الصغرى المحصورة قطعتين مستقيمتين موجهتين لهما نفس نقطة البداية أو النهاية " خارجتين من (داخلتين فى) نفس النقطة "

* إذا كان هـ قياس الزاوية الصغرى بين متجهين فإن $0^\circ \leq \text{هـ} \leq 180^\circ$

ملاحظة :



فى الشكل المقابل : إذا كانت القطعتان المستقيمتان الموجهتان لمتجهين إحداهما خارجة من نقطة " و " ، و الأخرى خارجة من نقطة " و " فإن : الزاوية الصغرى بين المتجهين تكون هى الزاوية المحصورة بين إحدى القطعتين الموجهتين و إمتداد القطعة الموجهة الأخرى من جهة " و "

* حاصل الضرب القياسى لمتجهين :

هو الكمية القياسية المساوية لحاصل ضرب معيار المتجه الأول فى معيار المتجه الثانى فى جيب تمام الزاوية الصغرى المحصورة بينهما

أى أن : $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ ب حتا هـ}$

حيث : $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}$ حاصل الضرب القياسى ، أ ، ب معيارى المتجهين

* إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}_1 \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_2 \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \text{ب}_1 \overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}_2 \overrightarrow{\text{ص}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_1 \text{ب}_1 + \text{أ}_2 \text{ب}_2$

* نتائج :

* $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \odot \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{0} \odot \overrightarrow{0} = \text{صفر}$ حيث : $\overrightarrow{0}$ هو المتجه الصفرى
* $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \odot \overrightarrow{\text{أ}}$
* حاصل الضرب القياسى لأى متجه فى نفسه يساوى مربع معياره

أى أن : لأى متجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ يكون : $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}^2$

* حاصل الضرب القياسى لمتجهين غير صفريين يكون :
  * موجباً إذا كانت الزاوية الصغرى حادة
  * سالباً إذا كانت الزاوية الصغرى منفرجة
  * صفراً إذا كانت الزاوية الصغرى قائمة

---

* حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين فإن حاصل الضرب الإتجاهى للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ " يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ " يعرف كالآتى : $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ ب حا هـ})\, \overrightarrow{\text{ى}}$

حيث هـ قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين ، ى متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يقع فيه المتجهين

* إذا كان : $\overleftarrow{أ} = أ_١ \overleftarrow{س} + أ_٢ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = ب_١ \overleftarrow{س} + ب_٢ \overleftarrow{ص}$ فإن :

$$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١) \overleftarrow{ع}$$

حيث : $\overleftarrow{ع}$ متجه وحدة عمودى على الذى يجمع $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ " $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$ مجموعة يمينية "

* **ملاحظات و نتائج :**

* $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ هو متجه ، معياره = $\| \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \| = أ ب جا هـ$

* متجه الوحدة فى إتجاه $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ هو المتجه $\overleftarrow{ى} = \frac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{أ ب جا هـ}$

* $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{٠} = \overleftarrow{٠} \times \overleftarrow{أ} = ٠ \times ٠ = ٠$

* $\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ} = -(\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب})$

* إذا كان $\overleftarrow{أ} \parallel \overleftarrow{ب}$ فإن : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} =$ صفر

* $\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ص} = \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ع} = \overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{س} = \overleftarrow{ص}$

* $\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{س} = - \overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ص} = - \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{ص} = - \overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ع} = - \overleftarrow{س}$

، $\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ع} = - \overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{س} = - \overleftarrow{ص}$

* **المعنى الهندسى لمعيار حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين :**

معيار حاصل الضرب الإتجاهى لأى متجهين يمثله هندسياً مساحة سطح متوازى الأضلاع الذى فيه القطعتين المستقيمتين الموجهتين الممثلتين لهذين المتجهين ضلعين متجاورين فيه أو يساوى ضعف مساحة سطح المثلث الذى فيه هاتين القطعتين ضلعين فى المثلث

عزم قوة بالنسبة لنقطة :

* تعريف : يعرف عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة " و "

و يرمز له بالرمز $\overleftarrow{ج}_و$ على أنه الكمية المتجهة $\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$

أى أن : $\overleftarrow{ج}_و = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$

حيث : $\overleftarrow{ر}$ متجه الموضع لأى نقطة " أ مثلاً " على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة " و "

ملاحظات :

١ – $\| \overleftarrow{ج}_و \| = ر ق جا هـ = ل ق$

حيث : هـ قياس الزاوية الصغرى بين $\overleftarrow{ر}$ ، $\overleftarrow{ق}$ ، ل = ر جا هـ

، ل هو ذراع القوة (طول العمود الساقط على خط عمل القوة من النقطة " و ")

٢ – وحدة قياس معيار عزم قوة بالنسبة لنقطة = وحدة قياس طول × وحدة قياس معيار قوة

٣ – عزم قوة بالنسبة لنقطة ثابت لأى نقطة على خط عمل القوة

٤ – عزم قوة بالنسبة لأى نقطة على خط عملها هو المتجه الصفرى

" معيار عزم قوة بالنسبة لأى نقطة على خط عملها = صفر "

أو يساوى ضعف مساحة سطح المثلث الذى فيه هاتين القطعتين ضلعين فى المثلث

ملاحظات

(١) إذا كان $ج_ب = ٠$ فإن خط عمل المحصلة يمر بنقطة ب

(٢) إذا كان $ج_ب = ج_ء$ فإن خط عمل المحصلة // $\overline{ب ء}$

(٣) إذا كان $ج_ب = - ج_ء$ فإن خط عمل المحصلة ينصف $\overline{ب ء}$

(٤) إذا كانت $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftarrow{ا ب}$ فإن $ق = ك \overleftarrow{ا ب}$

(٥) إذا كانت ا = ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب = ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن منتصف $\overline{ا ب}$ = ($\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$)

عزوم القوى المستوية :

جميع متجهات عزوم القوى المستوية " التى تقع خطوط عملها فى مستو واحد " بالنسبة لنقطة واقعة فى نفس المستوى تكون متوازية و عمودية على مستوى هذه القوى و معيار كل منها يساوى حاصل ضرب معيار القوة فى طول العمود الساقط من النقطة على خط عملها

قاعدة الإشارة لعزم قوة حول نقطة :

عزم قوة حول نقطة يكون موجباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون سالباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون صفراً إذا كان خط عمل القوة يمر بنفس النقطة

ففى الشكل المقابل :

عزم ق حول ا موجب ، عزم ق حول ب سالب ، عزم ق حول حـ = صفر

نتائج :

* إذا كان عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ا = عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ب فإن خط عمل $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{ا ب}$

* إذا كان عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ا = – (عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ب) فإن خط عمل $\overleftarrow{ق}$ يمر بمنتصف $\overline{ا ب}$

نظرية العزوم :

مجموع عزوم عدة قوى متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة

القوى المتوازية المستوية

نعلم أن :

لتعيين محصلة مجموعة من القوى المتلاقية فى نقطة يلزم معرفة : ١ – معيارها

٢ – الإتجاه الذى تعمل فيه إذ أن خط عملها يمر بنقطة تلاقى مجموعة القوى

أما : لتعيين محصلة مجموعة القوى غير المتلاقية فى نقطة و التى تؤثر فى جسم متماسك يلزم معرفة :

١ – معيارها ٢ – الإتجاه الذى تعمل فيه

٣ – خط عملها أى معرفة نقطة من الجسم يمر بها خط عمل المحصلة

* محصلة قوتين متوازيتين :

١ – القوتان متحدا الإتجاه :

ح = ق$_{١}$ + ق$_{٢}$

ق$_{١}$ ق$_{٢}$ حـ ء ب

محصلة قوتين متوازيتين و متحدى الإتجاه هى قوة :

(١) معيارها = مجموع معيارى القوتين أى : ح = ق$_{١}$ + ق$_{٢}$

(٢) إتجاهها هو نفس إتجاه القوتين

(٣) خط عملها يقسم المسافة بين خطى عمل القوتين من الداخل بنسبة عكسية

لمعياريهما أى من الشكل المقابل يكون : ق$_{١}$ × ب ء = ق$_{٢}$ × ء حـ

نتائج :

١ – محصلة قوتين متوازيتين و متساويتين فى المعيار و متحدى الإتجاه هى قوة معيارها

ضعف معيار إحدى القوتين و فى إتجاههما و خط عملها ينصف المسافة بين القوتين

٢ – إذا كان : ق$_{١}$ > ق$_{٢}$ فإن : ء حـ > ب ء

٢ – القوتان متضادتان فى الإتجاه :

ح = ق$_{١}$ – ق$_{٢}$

ق$_{١}$ ق$_{٢}$ حـ ب ء

محصلة قوتين متوازيتين و متضادتين فى الإتجاه هى قوة :

(١) معيارها = الفرق بين معيارى القوتين

أى : ح = ق$_{١}$ – ق$_{٢}$ حيث : ق$_{١}$ > ق$_{٢}$

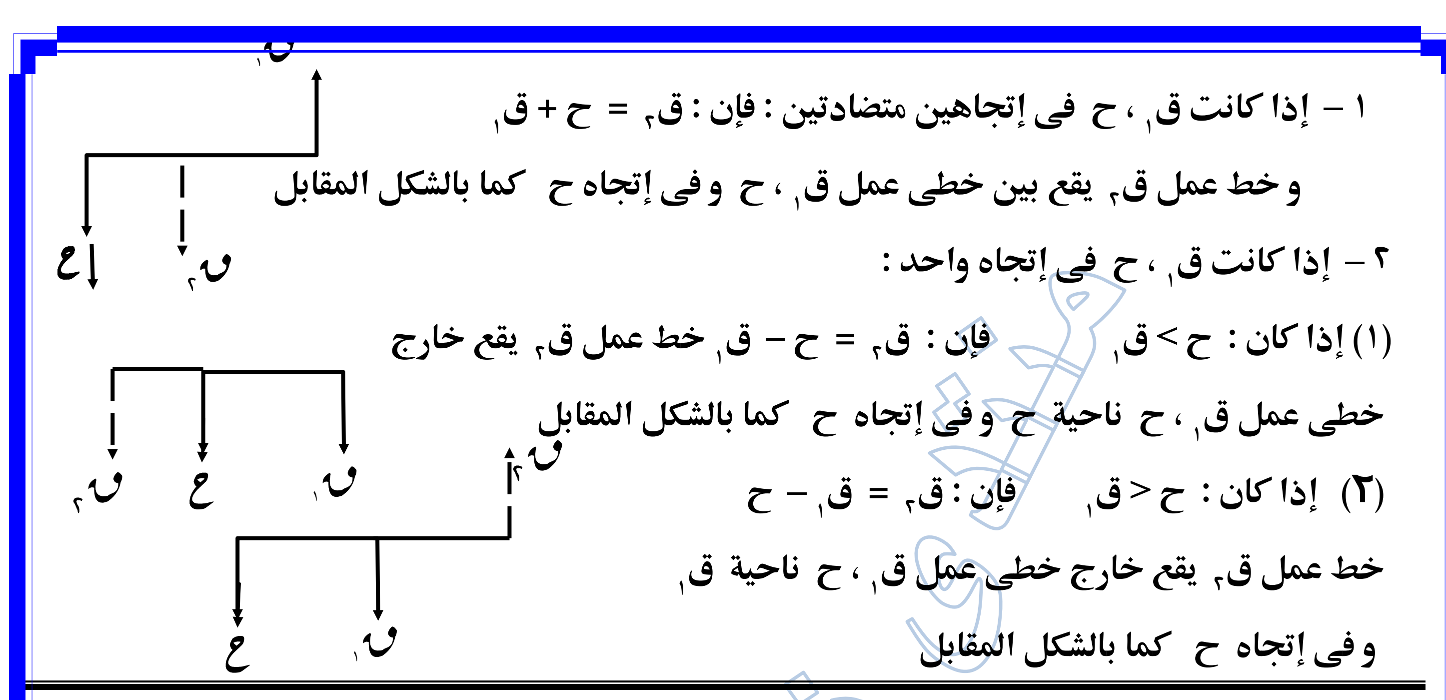
(٢) إتجاهها هو إتجاه القوة ذات المعيار الأكبر

(٣) خط عملها يقسم المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج ناحية القوة الأكبر

بنسبة عكسية لمعياريهما أى من الشكل المقابل يكون : ق$_{١}$ × ب ء = ق$_{٢}$ × ء حـ

ملاحظة : إذا علم معيار إحدى قوتين متوازيتين ق$_{١}$ و معيار محصلتيهما ح فلتعيين معيار القوة الثانية ق$_{٢}$

يراعى :



١ – إذا كانت $ق_1$ ، ح فى إتجاهين متضادتين : فإن : $ق_2$ = ح + $ق_1$

و خط عمل $ق_2$ يقع بين خطى عمل $ق_1$ ، ح و فى إتجاه ح كما بالشكل المقابل

٢ – إذا كانت $ق_1$ ، ح فى إتجاه واحد :

(١) إذا كان : ح > $ق_1$ فإن : $ق_2$ = ح – $ق_1$ خط عمل $ق_2$ يقع خارج خطى عمل $ق_1$ ، ح ناحية ح و فى إتجاه ح كما بالشكل المقابل

(٢) إذا كان : ح < $ق_1$ فإن : $ق_2$ = $ق_1$ – ح

خط عمل $ق_2$ يقع خارج خطى عمل $ق_1$ ، ح ناحية $ق_1$

و فى إتجاه ح كما بالشكل المقابل

---

* محصلة عدة قوى متوازية و مستوية :

الخطوات :

١ – نفرض متجه وحدة فى إتجاه إحدى القوى و يكون :

القياس الجبرى للمحصلة = مجموع القياسات الجبرية للقوى

٢ – القياس الجبرى لعزم المحصلة حول نقطة إختيارية فى مستوى القوى = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نفس النقطة

* توازن أكثر من ثلاث قوى متوازية مستوية :

إذا أتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية فإن :

١ – مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى = صفر

٢ – مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أية النقطة فى مستويها = صفر

إتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

إذا أتزن جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :-

١– مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى = صفر

٢– مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها = صفر

ملاحظات : ١– إذا كان القضيب على وشك الدوران = على وشك الانقلاب = دون أن ينقلب

= دون أن يختل كل هذا يعنى أن القضيب ما زال متزنا



٢– إذا كان القضيب على وشك الدوران حول جـ فان $ر_1$ = ٠

٣– إذا كان القضيب على وشك الدوران حول ء فإن $ر_2$ = ٠



٤– يفضل عند أخذ العزوم أخذها عند نقطة بها مجهول

الإتزان – إختزال مجموعة من القوى – القوى المكافئة

إذا أثرت مجموعة القوى $\overline{ق}_1$ ، $\overline{ق}_2$ ؛ $\overline{ق}_3$ ، ..... ، $\overline{ق}_ن$ فى النقط $ا_1$ ، $ا_2$ ، $ا_3$ ، ..... ، $ا_ن$ على الترتيب ، كانت " و " نقطة الأصل الواقعة فى نفس مستوى القوى و كانت $\overline{ر}_1$ ، $\overline{ر}_2$ ؛ $\overline{ر}_3$ ، ..... ، $\overline{ر}_ن$ هى متجهات مواضع هذه النقط على الترتيب بالنسبة لنقطة الأصل " و " فإن :

(١) متجه مجموع القوى $\overline{ح}$: $\overline{ح} = \overline{ق}_1 + \overline{ق}_2 + \overline{ق}_3 + ... + \overline{ق}_ن$

أو $\sum_{م=1}^{ن} \overline{ق}_م$

حيث : $\sum_{م=1}^{ن} \overline{ق}_م = \overline{ق}_1 + \overline{ق}_2 + \overline{ق}_3 + ... + \overline{ق}_ن$

و ذلك بوضع : م = ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ن فى $\overline{ق}_م$ وجمع النواتج

(٢) متجه عزوم القوى بالنسبة للنقطة " و " : $\overline{ج}_و$

$$\overline{ج}_و = \overline{ر}_1 \times \overline{ق}_1 + \overline{ر}_2 \times \overline{ق}_2 + \overline{ر}_3 \times \overline{ق}_3 + ... + \overline{ر}_ن \times \overline{ق}_ن$$

أو $= \sum_{م=1}^{ن} \overline{ر}_م \times \overline{ق}_م$

و ذلك بوضع : م = ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ن فى $\overline{ر}_م \times \overline{ق}_م$ وجمع النواتج

ملاحظات :

* $\overline{ج}_و$ لا يتغير بتبديل النقط $ا_1$ ، $ا_2$ ، $ا_3$ ، ..... ، $ا_ن$ بنقط أخرى إختيارية مختارة إختياراً مناسباً بحيث تكون واقعة على نفس خطوط عمل مجموعة القوى على الترتيب
* يمكن الإكتفاء بحساب القياس الجبرى لمتجه عزوم القوى منسوباً لمتجه وحدة عمودى على مستوى القوى و بالتالى عزم القوة = مقدار القوة × ذراعها مع الأخذ فى الإعتبار أن عزم القوة يكون موجباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول " و " فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة و يكون سالباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول " و " فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة

العلاقة بين عزمى مجموعة محدودة من القوى بالنسبة لنقطتين :

إذا أثرت مجموعة القوى $\overline{ق}_1$ ، $\overline{ق}_2$ ؛ $\overline{ق}_3$ ، ..... ، $\overline{ق}_ن$ فى النقط $ا_1$ ، $ا_2$ ، $ا_3$ ، ..... ، $ا_ن$ على الترتيب ، كانت " و " ، " و' " واقعتان فى نفس مستوى القوى و كانت $\overline{ر}_1$ ، $\overline{ر}_2$ ؛ $\overline{ر}_3$ ، ..... ، $\overline{ر}_ن$ هى متجهات مواضع هذه النقط على الترتيب بالنسبة للنقطة " و " ، و كانت $\overline{ر'}_1$ ، $\overline{ر'}_2$ ؛ $\overline{ر'}_3$ ، ..... ، $\overline{ر'}_ن$ هى متجهات

مواضع هذه النقط على الترتيب بالنسبة للنقطة " و' " و كان $\overline{ع}_{١}$ ، $\overline{ع}_{٢}$ عزمى مجموعة القوى بالنسبة

للنقطتين " و " ، " و' " على الترتيب ، $\overline{ح}$ متجه مجموع هذه القوى فإن : $\overline{ع}_{٢} = \overline{ع}_{١} + \overline{و\,و'} \times \overline{ح}$

نظـــــــرية : إذا إنعدم مجموع القوى كان عزم المجموعة ثابتاً لا يتوقف على النقطة التى ننسب إليها هذا العزم

الإتـــــزان العـــام

تعريف : إذا إنعدم مجموع القوى و إنعدم عزم المجموعة بالنسبة لأى نقطة قيل أن المجموعة متزنة و إذا أثرت مثل هذه المجموعة على جسم ما قيل أن هذا الجسم متزن

نظرية : إذا أنعدم مجموع القوى لمجموعة ما و إنعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة كانت المجموعة متزنة

الشروط الكافية و اللازمة لإتزان مجموعة من القوى :

لكى تتوازن مجموعة من القوى يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط الآتية :

(١) ينعدم متجه مجموع القوى

" ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى إتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها "

(٢) ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

" ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها "

أى : مجـ س = ٠ ، مجـ ص = ٠ ، ع = ٠

إختزال مجموعة من القوى المستوية

نعلم أن :

* محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة واحدة = مجموع متجهات القوى و خط عمل المحصلة يمر بنفس النقطة و عزم المحصلة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ = مجموع عزوم القوى بالنسبة لنفس النقطة
* محصلة عدة قوى متوازية و لا ينعدم مجموعها = مجموع متجهات القوى و خط عمل المحصلة يتحدد بتطبيق نظرية العزوم و عزم المحصلة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ = مجموع عزوم القوى بالنسبة لنفس النقطة وفى كلتا الحالتين نحصل على قوة واحدة " المحصلة " تصل عمل القوى أى تكافئها و بالتالى أختزلت القوى

خطوات إختزال مجموعة من القوى المستوية :

نوجد محصلة القوى أى : $\overline{ح} = \overline{ق}_{١} + \overline{ق}_{٢} + \overline{ق}_{٣} + \cdots + \overline{ق}_{ن}$

نوجد $\overline{ع}$ مجموع عزوم القوى بالنسبة لأى نقطة

(١) إذا كان : $\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{0}$ فإن المجموعة تؤول إلى قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ عزمها حول نفس النقطة = $\overrightarrow{\text{ع}}$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{0}$ فإن المجموعة تكون متوازنة

ملاحظة : حيث أن القوى مستوية يمكن بإيجاد القياسات الجبرية لمتجهات عزوم القوى منسوبة لمتجه وحدة عمودى على مستوى القوى

تكافؤ مجموعات القوى

تعريف :

يقال لمجموعتين من القوى أنهما متكافئتان إذا تساوى :

١ – مجموعا القوى فى المجموعتين ٢ – عزما المجموعتين بالنسبة لكل نقطة

نظرية : إذا تساوى مجموعا القوى لمجموعتين من القوى و تساوى عزماهما بالنسبة لنقطة واحدة كانت المجمعتان متكافئتين

الشروط الكافية و اللازمة لتكافؤ مجموعتين من القوى :

لكى تتكافأ مجموعتان من القوى يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط الآتية :

(١) يتساوى مجموعا القوى فى المجموعتين " يتساوى مجموعا المركبات الجبرية للقوى فى المجموعتين فى أى إتجاهين متعامدين واقعين فى مستوى القوى "

(٢) يتساوى عزما المجموعتين بالنسبة لنقطة واحدة

" يتساوى مجمعا القياسات الجبرية لعزمى المجمعتين حول نقطة واحدة فى مستوى القوى " أى : $\text{س} = \text{س}'$ ، $\text{ص} = \text{ص}'$ ، $\text{ع} = \text{ع}'$

ملحوظات :

* لا يتحقق تكافئ المجموعتين إذا لم يتساوى أى من :

$\text{س} = \text{س}'$ ، $\text{ص} = \text{ص}'$ ، $\text{ع} = \text{ع}'$

* تظل الشروط السابقة صحيحة فى حالة أن يكون متجها الوحدة $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ غير متوازيين و غير متعامدين

* عزما مجموعتين من القوى المستوية بالنسبة لأى ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة تتكافأن

* عزما مجموعتين من القوى بالنسبة لنقطتين واقعتين فى مستوى القوى و تساويا مجموعى القوى فى إتجاه غير عمودى على الخط الواصل بين هاتين النقطتين متكافئتان

الإزدواجـــــــــــات

تعريف :

الإزدواج هو مجموعة مكونة من قوتين متساويتين فى المقدار و متضادتين فى الإتجاه و لا يجمعهما خط عمل واحد

نظرية :

عزم الإزدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التى ينسب إليها عزمى قوتيه ، و هو يساوى عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة على خط عمل القوة الأخرى

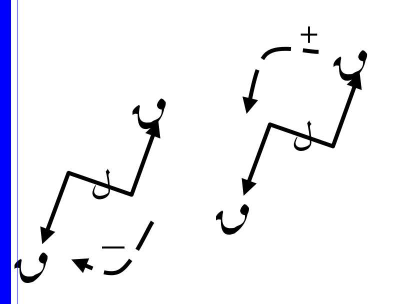
معيار عزم الإزدواج :

* معيار عزم الإزدواج = معيار إحدى قوتيه × البعد العمودى بين خطى عملهما

أى أن : $\|\overrightarrow{\text{ج}}\| = \text{ق} \times \text{ل}$

(يسمى " ل " البعد العمودى بين خطى عمل قوتى الإزدواج بذراع الإزدواج)

إشارة القياس الجبرى لعزم الإزدواج :



يكون القياس الجبرى لعزم الإزدواج موجباً إذا كانت قوتيه تعملان فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون سالباً إذا كانت قوتيه تعملان فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة

توازن إزدواجين :

يتوازن إزدواجان مستويان معاً إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى

أى : إذا إنعدم المجموع الجبرى للقياسين الجبريين لمتجهى عزميهما

" $\text{ج}_1 + \text{ج}_2 = \text{صفر}$ أو $\text{ج}_1 = -\text{ج}_2$ "

تكافؤ إزدواجين :

يتكافئ إزدواجان مستويان معاً إذا كان وجد إزدواج ثالث فى مستويهما يتوازن مع كل منهما أى : إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما " $\text{ج}_1 = \text{ج}_2$ "

مجموع إزدواجين مستويين :

مجموع إزدواجين مستويين هو إزدواج عزمه يساوى مجموع عزمى هذين الإزدواجين أى : القياس الجبرى لعزم مجموع إزدواجين مستويين = مجموع القياسين الجبريين لعزميهما " $\text{ج} = \text{ج}_1 + \text{ج}_2$ "

مجموع أى عدد محدود من الإزدواجات المستوية :

مجموع أى عدد محدود من الإزدواجات المستوية هو إزدواج يساوى مجموع عزوم هذه الإزدواجات

أى : القياس الجبرى لعزم مجموع عدة إزدواجات مستوية = مجموع القياسات الجبرية لعزومها

" $ع = ع_1 + ع_2 + \dots + ع_ن$ "

ملاحظة : إذا كان : $ع$ = صفر فإن : مجموعة الإزدواجات تكون متوازنة

قاعدة هامة :

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية فى جسم متماسك و مثلها تمثيلاً تاماً أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ إزدواجاً معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المثلث × م

حيث : م ثابت يساوى عدد وحدات مقدار القوة التى تمثلها وحدة الأطوال

" م = مقدار القوة ÷ طول الضلع الممثل لها "

تعريف

(١) إذا أنعدم مجموع القوى و لم ينعدم عزم المجموعة فإن هذه المجموعة تكون إزدواجاً و يكون عزم هذه المجموعة هو عزم الإزدواج

(٢) إذا كان : $\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{٠}$ ، $\overleftarrow{ج} \neq \overleftarrow{٠}$ فإن المجموعة تؤول إلى إزدواج

عزمه المحصل = $\overleftarrow{ج}$

* إذا كانت مجموعة القوى تتكون من قوتين متساويتين فى المقدار و متضادتين فى الإتجاه و لا يجمعهما خط عمل واحد فإنها تكون إزدواجاً

معيار عزمه = معيار إحدى القوتين × البعد العمودى بين خطى عمل القوتين

قاعدة :

إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط فى مستويها ليست على إستقامة واحدة يساوى مقدار ثابت كانت المجموعة تكافئ إزدواجاً يساوى القياس الجبرى لعزمه هذا المقدار الثابت و إذا كان المقدار الثابت يساوى الصفر فإن مجموعة القوى تكو

الاسئلة الموضوعية (سؤال إجبارى)

❖ **السؤال الأول : إختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات.**

١ - إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٣\overrightarrow{\text{س}} + ٤\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}}$

فإن ($\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ح}}$) ⊥ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ...

(ا) $\overrightarrow{\text{س}} + ٢\overrightarrow{\text{ص}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}}$ (ح) $\overrightarrow{\text{صفر}}$ (ء) صفر

٢ - إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين ، هـ قياس الزاوية الصغرى التى يحصران هذان المتجهان عند رسمهما خارجين من نقطة واحدة ، $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودى على مستويهما فإن $\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$ = ...

(ا) ا ب حا هـ (ب) ا ب حتا هـ $\overrightarrow{\text{ى}}$ (ح) − ا ب حا هـ $\overrightarrow{\text{ى}}$ (ء) ا ب حا هـ $\overrightarrow{\text{ى}}$

٣ - يقع جسم تحت تأثير القوى : $\overrightarrow{\text{ق}}_١ = ٢\overrightarrow{\text{س}} - \text{أ}\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_٢ = ٥\overrightarrow{\text{س}} + ٢\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_٣ = \text{ب}\overrightarrow{\text{س}} - ٥\overrightarrow{\text{ص}}$ فإن كان الجسم متزنا فإن (أ ، ب) = ...

(ا) (٣ ، ٧) (ب) (−٣ ، ٧) (ح) (٣ ، −٧) (ء) (−٣ ، −٧)

٤ - فى الشكل المقابل : أ ب ح ء مستطيل فيه أ ب = ١٢ سم ، ب ح = ٨ سم اثرت القوى المبينة مقادير ها واتجاهاتها بالرسم فكونت أزدواجين متوازنين

فإن : ($\text{ق}_١$ ، $\text{ق}_٢$) = (.......... ، ....)

(ا) (٦ نيوتن ، ٤ نيوتن) (ب) (٦ نيوتن ، ٨ نيوتن)

(ح) (٨ نيوتن ، ٤ نيوتن) (ء) (٤ نيوتن ، ١٢ نيوتن)

٥ - زاوية الإحتكاك هى الزاوية المحصورة بين قوة ....

(ا) الإحتكاك وقوة رد الفعل العمودى (ب) رد الفعل المحصل وقوة رد الفعل العمودى

(ح) الإحتكاك والوزن (ء) رد الفعل المحصل والوزن

٦ - إذا اتصل قضيب بأحد طرفيه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى وكانت س٬ ، ص٬ هما المركبتين الجبريتين لقوة رد فعل المفصل وكانت س = ٣ ث كجم ، ص = ٤ ث كجم فإن قوة رد فعل المفصل تساوى ....

(ا) ٥ ث كجم (ب) ١ ث كجم (ح) ٧ ث كجم (ء) $\sqrt{7}$ ث كجم

إجابة السؤال الأول

(١) صفر (٢) − أ ب جا هـ $\overrightarrow{\text{ى}}$ (٣) (−٣ ، −٧)

(٤) (٦ نيوتن ، ٤ نيوتن) (٥) رد الفعل المحصل وقوة رد الفعل العمودى

(٦) ٥ ث كجم

❖ السؤال الثانى : إختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات.

١ – إذا كان أ ، ب متجهان غير صفريان وقياس الزاوية بينهما = هـ فإن : ‖أ × ب‖² + ‖أ . ب‖² = ...

(أ) أ² ب² حا هـ (ب) ١ (جـ) ٠ (د) أ² ب²

٢ – إذا كان متجه عزم القوة ق بالنسبة للنقطة جـ (٢ ، ٣) = ٦ ع ومتجه عزمها بالنسبة للنقطة د (٠ ، ٠ ، -١) = -٦ ع فإن متجه عزمها بالنسبة للنقطة هـ (...... ، ......) = ٠

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (١ ، ١) (جـ) (٦ ، -٦) (د) (٠ ، -٣)

٣ – فى الشكل المقابل : أ ب قضيب منتظم ومتزن تحت تأثير القوى الموضحة بالشكل فإن ق = ... ث كجم

(أ) ١٥ (ب) $\frac{٢٠٠}{٣}$

(جـ) ٢٥ (د) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$

٤ – إذا كان ٢ ق ، ٣ ق، هما قوتى ازدواج وكان ق = ٤ س – ٢ ص فإن ق، = ...

(أ) ٦ س – ص (ب) ٦ س – ٣ ص (جـ) ١٢ س – ٦ ص (د) ٦ س + ٣ ص

٥ – يتوقف معامل الإحتكاك بين جسمين على ....

(أ) شكليهما (ب) وزناهما

(جـ) طبيعة الجسمين المتلامسين (د) حجم كل من الجسمين

٦ – الشرط اللازم والكافى لإتزان مجموعة من القوى هو ....

(أ) انعدام متجه مجموع القوى (ب) أن تكون متلاقية فى نقطة

(جـ) أن تكون متوازية (د) انعدام متجه مجموع القوى وانعدام متجه عزوم القوى حول أى نقطة

إجابة السؤال الثانى

(١) أ² ب² (٢) (١ ، ١) (٣) ٢٥

(٤) ٦ س – ٣ ص (٥) طبيعة الجسمين المتلامسين

(٦) انعدام متجه مجموع القوى وانعدام متجه عزم القوى حول أى نقطة

❖ السؤال الثالث : أكمل كلاً مما يأتى .

(١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ٤$\overrightarrow{س}$ − ٣$\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ١٢$\overrightarrow{س}$ + ٥$\overrightarrow{ص}$ ، هـ هى قياس الزاوية بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ فإن حتا هـ = ...

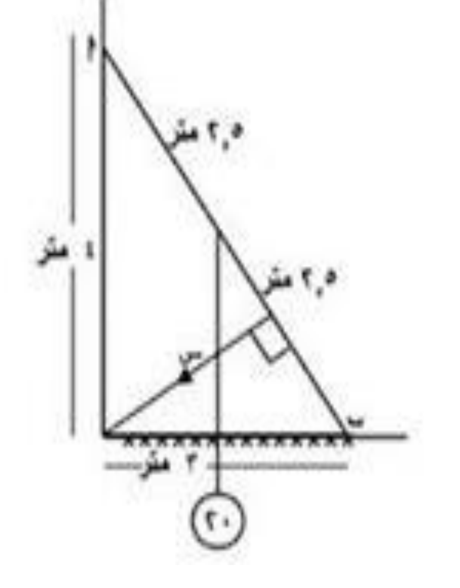
(٢) تؤثر القوة $\overrightarrow{ق}_1$ = $\overrightarrow{س}$ − ٣$\overrightarrow{ص}$ فى النقطة أ (٢ ، ٤) وتؤثر القوة $\overrightarrow{ق}_2$ = ٢$\overrightarrow{س}$ − ٦$\overrightarrow{ص}$ فى النقطة (−١ ، ٢) فإن المحصلة تؤثر فى النقطة ....

(٣) إذا كان خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$ ينصف $\overline{حـ ء}$ فإن ....

(٤) الازدواج عبارة عن ....

(٥) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان قياس زاوية المستوى على الأفقى أكبر من قياس زاوية الاحتكاك فإن الجسم ....

(٦) فى الشكل المقابل : سلم منتظم طوله ٥ متر ووزنه ٢٠ ث كجم يستند بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة وممنوع من الانزلاق بواسطة حبل مشدود من احدى نقط السلم إلى نقطة تقاطع الحائط مع الأرض واتجاه الحبل عمودى على اتجاه السلم وكان مقدار رد فعل الحائط على الطرف أ = $\frac{١٢٠}{٧}$ ث كجم فإن مقدار الشد = ...



إجابة السؤال الثالث

(١) $\frac{٣٣}{٦٥}$

(٢) (٠ ، $\frac{٨}{٣}$)

(٣) $\overrightarrow{ج}_{حـ}$ = $-\overrightarrow{ج}_{ء}$

(٤) قوتان متوازيتان ومتساويتان فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه

(٥) لا يمكن أن يتزن الجسم على المستوى

(٦) $\frac{١٥٠}{٧}$ ث كجم

❖ **السؤال الرابع : أكمل كللآ مما يأتى ..**

(١) إذا كان $\overline{أ}$ = (١ ، ٣٠) ، $\overline{ب}$ = ٢$\overline{س}$ + ٣$\overline{ص}$ ، $\overline{حـ}$ = (٢٠ ، ١) حيث { $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ ، $\overline{ع}$ } مجموعة يمينية فإن $\overline{أ}$ ⊥ ($\overline{ب}$ × $\overline{حـ}$) = ...

(٢) إذا كان المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى المستوية غير المتزنة حول نقطة ما يساوى صفرا فإن هذه النقطة ....

(٣) إذا تساوى مجموع عزوم متساوى حول كل من النقطتين حـ ، ء ولكن مع الإختلاف فى الإشارة فإن خط عمل المحصلة ....

(٤) إذا اتزن جسم تحت تأثير إزدواج وقوتين فإن هاتين القوتين تكون ....

(٥) إذا وضع جسم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ وكان معامل الإحتكاك يساوى طا ل وكان الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فإن هـ = ...

(٦) يمكن أن يتزن سلم إذا ارتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وطرفه السفلى على أرض أفقية ....

إجابة السؤال الرابع

(١) صفر (٢) تقع على خط عمل المحصلة (٣) ينصف $\overline{حـ ء}$

(٤) تكون إزدواج عزمه يساوى عزم الإزدواج الأول ولكنه مختلف عنه فى الإشارة

(٥) قياس زاوية ل (٦) خشنة

❖ السؤال الخامس: أكمل كلاً مما يأتى .

١ – إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٢$\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٢$\overrightarrow{س}$ + ٤$\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ح}$ = $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ فإن ($\overrightarrow{ب}$ × $\overrightarrow{ح}$) × $\overrightarrow{أ}$ = ...

٢ – إذا كان متجه عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة أ (٢ ، -٣) = ٧$\overrightarrow{ع}$ ومتجه عزمها بالنسبة للنقطة ب (٠ ، ١) = -٧$\overrightarrow{ع}$ فإن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ ....

٣ – مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأية نقطة فى الفراغ يساوى ....

٤ – إذا كان $\overrightarrow{ج_1}$ ، $\overrightarrow{ج_2}$ متجهى عزمى ازدواجين مستويين فإن الازدواجين يكونا متوازنين إذا كان ....

٥ – معامل الاحتكاك هو النسبة بين ....

٦ – الشروط الكافية لاتزان مجموعة من القوى . (١) ....

(٢) ....

إجابة السؤال الخامس

(١) $\overrightarrow{س}$ – ٢$\overrightarrow{ص}$

(٢) ينصف $\overline{أب}$

(٣) عزم المحصلة حول نفس النقطة

(٤) $\overrightarrow{ج_1}$ + $\overrightarrow{ج_2}$ = $\overrightarrow{0}$

(٥) مقدارى قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل العمودى

(٦)(١) ينعدم متجه مجموع القوى

(٢) ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

❖ السؤال السادس: أكمل كللآ مما يأتى .

(١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ٤$\overrightarrow{س}$ − ٣$\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ١٢$\overrightarrow{س}$ + ٥$\overrightarrow{ص}$ ، هـ هى قياس الزاوية بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ فإن جتا هـ = ...

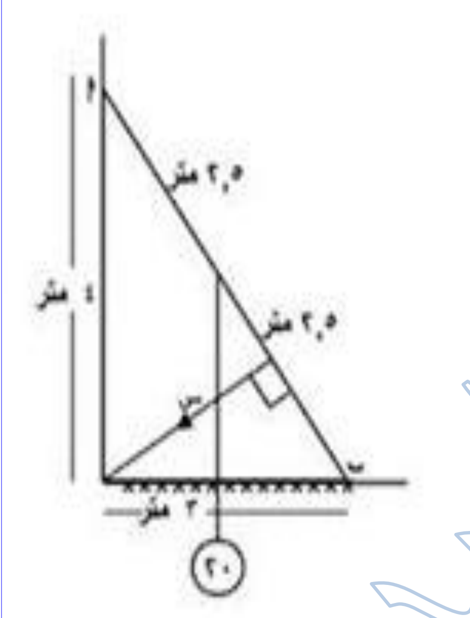
(٢) تؤثر القوة $\overrightarrow{ق}_1$ = $\overrightarrow{س}$ − ٣$\overrightarrow{ص}$ فى النقطة أ (٢ ، ٤) وتؤثر القوة $\overrightarrow{ق}_2$ = ٢$\overrightarrow{س}$ − ٦$\overrightarrow{ص}$ فى النقطة (-١ ، ٢) فإن المحصلة تؤثر فى النقطة ....

(٣) إذا كان خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$ ينصف $\overline{حء}$ فإن ....

(٤) الازدواج عبارة عن ....

(٥) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان قياس زاوية المستوى على الأفقى أكبر من قياس زاوية الإحتكاك فإن الجسم ....

(٦) فى الشكل المقابل : سلم منتظم طوله ٥ متر ووزنه ٢٠ ث كجم يستند بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة وممنوع من الانزلاق بواسطة حبل مشدود من احدى نقط السلم إلى نقطة تقاطع الحائط مع الأرض واتجاه الحبل عمودى على اتجاه السلم وكان مقدار رد فعل الحائط على الطرف أ = $\frac{١٢٠}{٧}$ ث كجم فإن مقدار الشد = ...



إجابة السؤال السادس

(١) $\frac{٣٣}{٦٥}$

(٢) (٠ ، $\frac{٨}{٣}$)

(٣) $\overline{ج}_{ح} = -\overline{ج}_{ء}$

(٤) قوتان متوازيتان ومتساويتان فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه

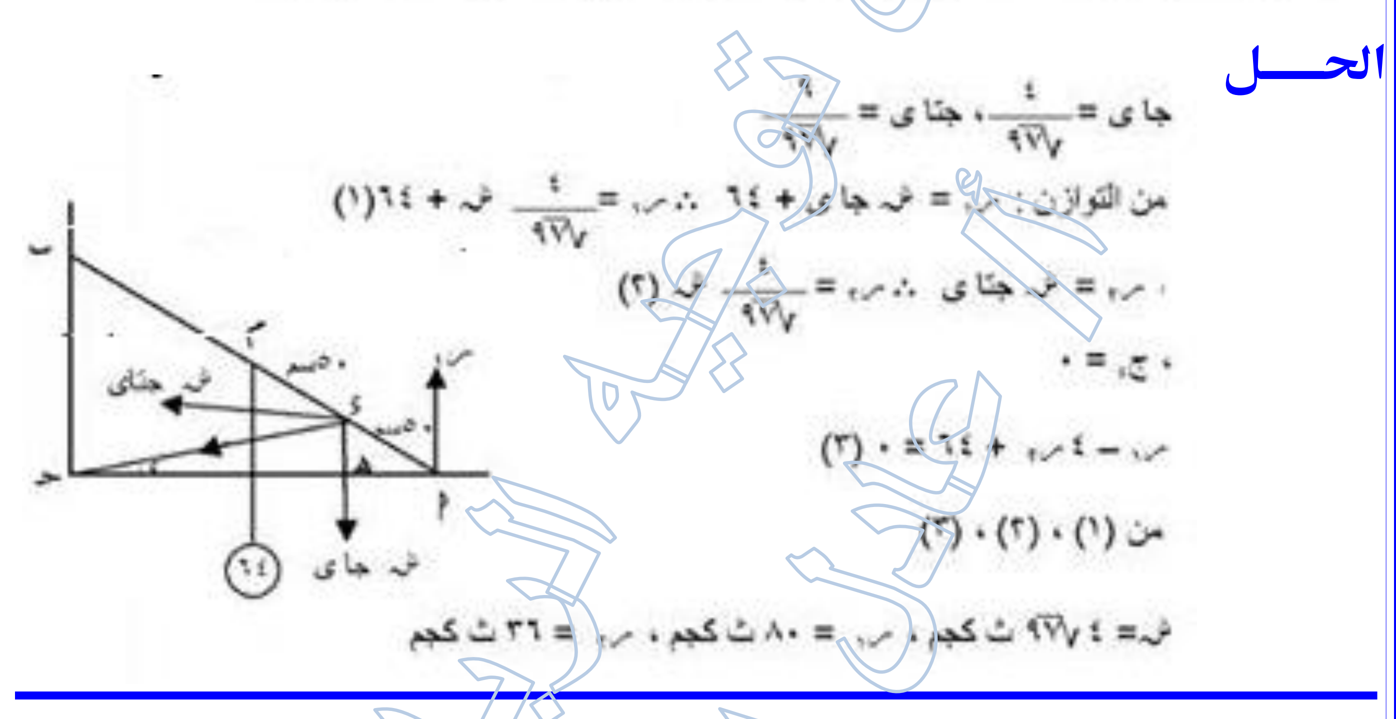
(٥) لا يمكن أن يتزن الجسم على المستوى

(٦) $\frac{١٥٠}{٧}$ ث كجم

الاسئلة المقالية (أجب عن ثلاث أسئلة من أربعة)

١) أ ب سلم منتظمة طوله ٢٠٠ سم ووزنه ٦٤ ثقل كجم يرتكز بطرفه أ على مستوى أفقي أملس وبطرفه ب على حائط رأسي أملس حفظ السلم من الانزلاق بواسطة حبل ربط أحد طرفيه بقاعدة الحائط رأسيا أسفل ب ، ربط طرفه الآخر في إحدى درجات السلم على بعد من أ يساوي ٥٠ سم . فإذا كان الطرف ب على بعد ١٦٠ سم من المستوى الأفقي فأوجد ضغط السلم على كل من المستوى الأفقي والحائط وكذا الشد في الخيط .

الحـــل



جا ى = $\frac{٤}{\sqrt{٩٧}}$ ، جتا ى = $\frac{٩}{\sqrt{٩٧}}$

من التوازن : $ر_1$ = ش جا ى + ٦٤ ∴ $ر_1$ = $\frac{٤}{\sqrt{٩٧}}$ ش + ٦٤ (١)

، $ر_2$ = ش جتا ى ∴ $ر_2$ = $\frac{٩}{\sqrt{٩٧}}$ ش (٢)

، $ح_ج$ = ٠

$ر_1$ − ٤ $ر_2$ + ٦٤ = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

ش = ٤ $\sqrt{٩٧}$ ث كجم ، $ر_1$ = ٨٠ ث كجم ، $ر_2$ = ٣٦ ث كجم

---

٢) $\vec{ق}_1$ ، $\vec{ق}_2$ ، $\vec{ق}_3$ ثلاث قوى متوازية ومتزنة تؤثر في النقط أ = (١ ، ٤) ، ب = (−٣ ، ٣) ، حـ = (−١ ، −٢) . أوجد $\vec{ق}_2$ ، $\vec{ق}_3$ إذا كانت $\vec{ق}_1$ = $\vec{س}$ + ٢ $\vec{ص}$.

الحـــل

$\vec{ق}_1$ // $\vec{ق}_2$ // $\vec{ق}_3$ ∴ $\vec{ق}_2$ = ك $\vec{ق}_1$ ،

$\vec{ق}_3$ = م $\vec{ق}_1$ حيث ك ، م ∈ ح

∵ المجموعة متزنة ∴ $\vec{ق}_1$ + $\vec{ق}_2$ + $\vec{ق}_3$ = $\vec{0}$

ومنها ١ + ك + م = ٠ (١)

$\vec{ج}_حـ$ = $\vec{0}$ ∴ $\vec{حـ أ}$ × $\vec{ق}_1$ + $\vec{حـ ب}$ × $\vec{ق}_2$ = $\vec{0}$

ومنها ك = $\frac{-٢}{٩}$ من (١) م = $\frac{-٧}{٩}$

∴ $\vec{ق}_2$ = $\frac{-٢}{٩}$ ($\vec{س}$ + ٢ $\vec{ص}$) ،

$\vec{ق}_3$ = $\frac{-٧}{٩}$ ($\vec{س}$ + ٢ $\vec{ص}$)

٣) اثبت ان : $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|^2 = أ^2 ب^2 - (\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب})^2$ ، حيث أ = $\|\overrightarrow{أ}\|$ ، ب = $\|\overrightarrow{ب}\|$

والمتجهان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ غير صفريين

الحــل بالتعويض عن $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|^2 = أ^2 ب^2 جا^2 هـ$ ،

$(\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب})^2 = أ^2 ب^2 جتا^2 هـ$

---

٤) أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٨ سم ، هـ ∈ $\overline{ب حـ}$ حيث ب هـ = ٦ سم أثرت قوى مقاديرها

٨ ، ١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٢ ، $٣\sqrt{٥}$ نيوتن فى الإتجاهات $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ ، $\overrightarrow{ء أ}$ ، $\overrightarrow{أ حـ}$ ، $\overrightarrow{أ هـ}$ على الترتيب .

أوجد مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول كل من النقطتين هـ ، م .

الحــل

من فيثاغورث : أ هـ = $٦\sqrt{٥}$ سم ، أ حـ = ٢٠ سم

، هـ و = ١٠ جا أ حـ ب = ٦ سم

فى Δ أ ب حـ : ∵ $\frac{أ ب}{أ حـ} = \frac{ب هـ}{حـ هـ}$

∴ $\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ ب أ حـ

م ن = ١٠ جا م أ ن = ١٠ جا هـ أ ب = ١٠ × $\frac{٦}{٦\sqrt{٥}}$ = $٢\sqrt{٥}$ سم

$ج_{هـ}$ = ٧٤ نيوتن سم ، $ج_{م}$ = -٤٢ نيوتن سم

---

٥) أ ب حـ صفيحة رقيقة على شكل مثلث قائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ١٨ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ووزنها ٥٠٠ ثقل جرام يؤثر فى نقطة تقاطع المستقيمات المتوسطة . علقت الصفيحة تعليقا حرا فى مسمار أفقى من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسيا أوجد معيار عزم الإزدواج الذى يجعل $\overline{أ ب}$ أفقيا .

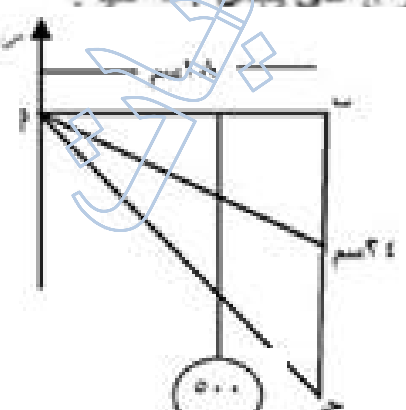
الحــل

أ ء = $\frac{٢}{٣}$ أ ب

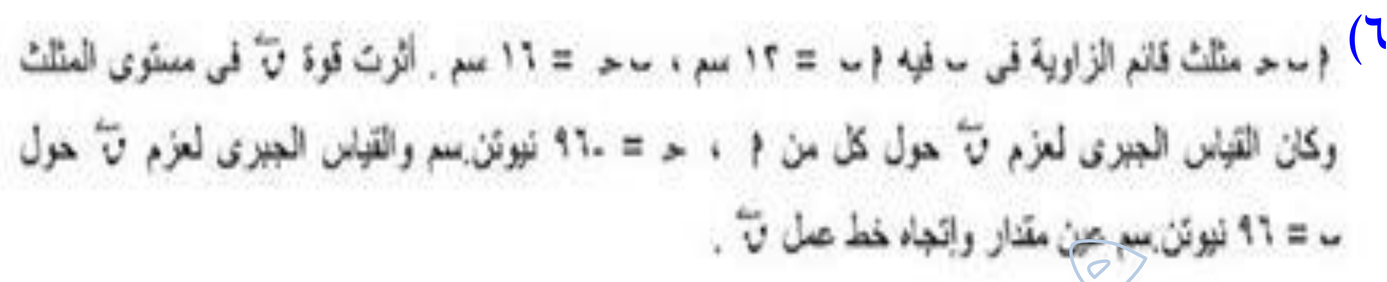
∴ أ ء = $\frac{٢}{٣}$ × ١٨ = ١٢ سم

معيار عزم الإزدواج المطلوب

= ٥٠٠ × ١٢ = ٦٠٠٠ ث جم سم



٦) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٦ سم . أثرت قوة $\vec{ق}$ فى مستوى المثلث وكان القياس الجبرى لعزم $\vec{ق}$ حول كل من أ ، حـ = ٩٦- نيوتن.سم والقياس الجبرى لعزم $\vec{ق}$ حول ب = ٩٦ نيوتن.سم عين مقدار واتجاه خط عمل $\vec{ق}$.



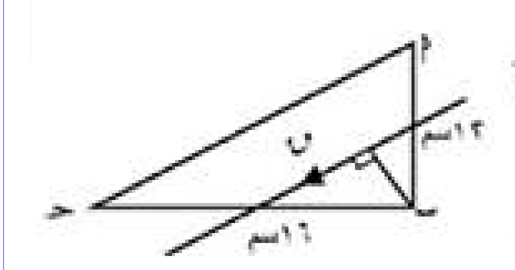
الحــل

∵ جـأ = جـحـ = -جـب

∴ خط عمل القوة // $\overleftrightarrow{أحـ}$ وينصف كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$

∵ جـب = ٩٦ نيوتن.سم ق × $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٩٦

← ق = ٢٠ نيوتن



---

٧) النقط أ (٢ ، ٧) ، ب (٢ ، ١٠) ، حـ (س ، ص) هى رءوس مثلث قائم الزاوية فى ب . أثرت القوى ١٥ ، ١٤ ، ق ثقل كجم فى الأضلاع $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بحـ}$ ، $\overrightarrow{حـأ}$ على الترتيب ، فإذا كانت المحصلة تساوى ٦ ثقل كجم وتعمل فى الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد :

أولا : إحداثى نقطة حـ ثانيا : مقدار ق

الحــل

المثلث قائم الزاوية ص = ١٠ ،

مجموع عزوم القوى حول حـ = عزم المحصلة حول حـ

١٥ × (٢ – س) = ٦ × ١٠

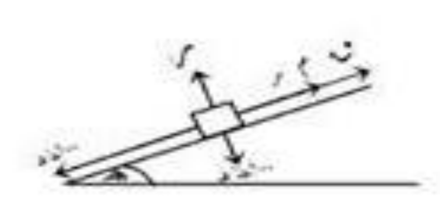
← س = -٢ ∴ إحداثى نقطة حـ (-٢ ، ١٠)

مجموع عزوم القوى حول ب = عزم المحصلة حول ب

∴ ق × $\frac{٤ \times ٣}{٥}$ = ٦ × ١٠ ← ق = ٢٥ ث كجم

٨) مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{٧}{٢٥}$ ، وضع عليه جسم وزنه ١٠٠ نيوتن ، فإذا كان معامل الإحتكاك بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد مقدار القوة التى تؤثرفى الجسم موازية لخط أكبر فى المستوى لتجعله على وشك الحركة .

الحــل أولا : عندما يكون الجسم على وشك الإنزلاق :

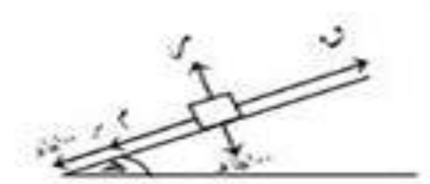


ر = ١٠٠ جتاهـ

ق + م ر = ١٠٠ جاهـ

ثم التعويض ← ق = ٨٢ نيوتن

ثانيا : عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى:



ر = ١٠٠ جتاهـ ،

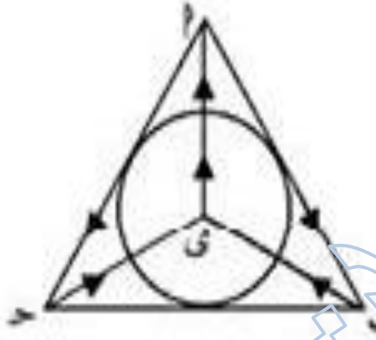
ق = م ر + ١٠٠ جاهـ

ثم التعويض ← ق = ١١٠ نيوتن

---

٩) أ ب حـ مثلث ، ى مركز الدائرة الداخلة ، أثرت خمس قوى فى $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بى}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{حـى}$ ، $\overrightarrow{ىأ}$ على الترتيب فإذا كانت مقادير هذه القوى تمثل بالأطوال أ ب ، ى ب ، أ حـ ، حـ ى ، ٢ ى أ على الترتيب . فبرهن أنها تكافئ إزدواجا وأوجد عزمه بدلالة أطوال $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ ، ونصف قطر الدائرة الداخلة . متى تتوازن هذه القوى ؟

الحــل القوى التى يمثلها $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بى}$ ، $\overrightarrow{ىأ}$



تكافىء إزدواج عزمه = -٢ △ أ ب ى = -أ ب × نق (١)

، القوى التى يمثلها $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{حـى}$ ، $\overrightarrow{ىأ}$ تكافىء إزدواج

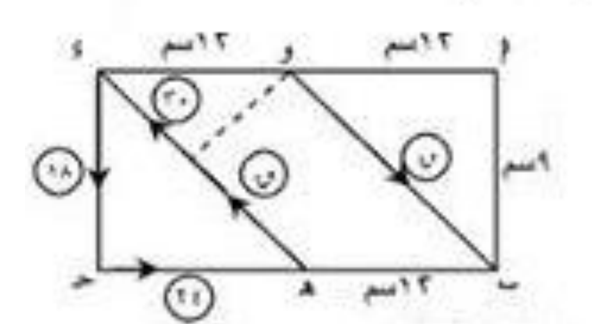
عزمه = ٢ △ أ ى حـ = أ حـ × نق (٢)

∴ المجموعة تكافىء إزدواج عزمه = أ حـ × نق − أ ب × نق = نق (أ حـ − أ ب)

وتتوازن هذه المجموعة عند عزم الإزدواج = صفر أى أ حـ = أ ب

١٠) ا ب حـ ء مستطيل فيه ا ب = ٩ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ، هـ ، و منتصفا $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ا ء}$ على الترتيب . أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠ نيوتن فى $\overrightarrow{ء حـ}$ ، $\overrightarrow{حـ هـ}$ ، $\overrightarrow{هـ ء}$ على الترتيب . أوجد القوتين اللتين تؤثران فى $\overrightarrow{هـ ا}$ ، $\overrightarrow{و ب}$ حتى تتزن المجموعة .

الحــل فى Δ ء حـ هـ ∵ القوى تتناسب مع الأضلاع (الثابت = ٢)
، القوى فى اتجاه دورى واحد



∴ المجموعة تكافىء إزدواج

عزمه = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٩ = ٢١٦ نيوتن.سم

، القوتان المؤثرتان فى $\overrightarrow{هـ ا}$ ، $\overrightarrow{و ب}$ تكونان إزدواج عزمه = -٢١٦ نيوتن.سم

∴ -ق × ١٢ × $\frac{٩}{١٥}$ = -٢١٦ ⟵ ق = ٣٠ نيوتن

---

١١) القوتان $\overrightarrow{ق}_١$ = ٢$\overrightarrow{س}$ - $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢$ = ٢$\overrightarrow{س}$ + ٤$\overrightarrow{ص}$ تؤثران فى النقطة ا (١ ، ١) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازى المستقيم المار بالنقطتين ب (٢ ، ١) ، حـ (٦ ، ٤) . ثم أوجد طول العمود الساقط من ب على خط عمل المحصلة

الحــل

$\overrightarrow{ح}$ = ٤$\overrightarrow{س}$ + ٣$\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى ا (١ ، ١)

∵ $\overrightarrow{ج}_ب$ = $\overrightarrow{ب ا}$ × $\overrightarrow{ح}$ = (-$\overrightarrow{س}$ + ٠$\overrightarrow{ص}$) × (٤$\overrightarrow{س}$ + ٣$\overrightarrow{ص}$) = -٣$\overrightarrow{ع}$

، $\overrightarrow{ج}_حـ$ = $\overrightarrow{حـ ا}$ × $\overrightarrow{ح}$ = (-٥$\overrightarrow{س}$ - ٣$\overrightarrow{ص}$) × (٤$\overrightarrow{س}$ + ٣$\overrightarrow{ص}$) = -٣$\overrightarrow{ع}$

∵ $\overrightarrow{ج}_ب$ = $\overrightarrow{ج}_حـ$ ∴ خط عمل المحصلة // المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$

طول العمود الساقط من ب على خط عمل المحصلة

= $\frac{\|\overrightarrow{ج}_ب\|}{\|\overrightarrow{ح}\|}$ = $\frac{٣}{\sqrt{١٦ + ٩}}$ = ٠,٦ وحدة طول

١٢) قوتان متوازيتان وفى اتجاه واحد مقدارهما ٤٠ ، ٣٠ ث جم تؤثران فى النقطتين ا ، ب على الترتيب من جسم متماسك . فإذا انتقلت نقطة تأثير القوة التى مقدارها ٤٠ ث جم مسافة قدرها ل على الشعاع $\overrightarrow{اب}$ بحيث تظل هذه القوة موازية للقوة الأخرى . اثبت أن نقطة تأثير محصلة القوتين تنتقل مسافة قدرها $\frac{٤}{٧}$ ل .

الحــل

قبل انتقال القوة ٤٠ ث.جم :

٤٠ × ا حـ = ٣٠ × ب حـ ∴ ٤ ا حـ = ٣ ب حـ (١)

بعد انتقال القوة ٤٠ ث.جم موازية للقوة ٣٠ ث.جم فى اتجاه $\overrightarrow{اب}$

∴ ٤٠ × اَ حـَ = ٣٠ × ب حـَ

∴ ٤٠ × (ل + ا حـ – حـ حـَ) = ٣ (ب حـ + حـ حـَ)

٤ل + ٤ ا حـ – ٤ حـ حـَ = ٣ ب حـ + ٣ حـ حـَ

من (١) ∴ ٤ل = ٧ حـ حـَ ⟵ حـ حـَ = $\frac{٤}{٧}$ ل

ا اَ حـَ حـ
٤٠ ٤٠ ع ع ٣٠

١٣) ا ب حـ ء صفيحة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ٩ سم ووزنها ٨ نيوتن معلقة ومستواها رأسيا فى مسمار أفقى من ثقب صغير بالقرب من الرأس ا .

أوجد الضغط على المسمار . وإذا أثر على الصفيحة فى نفس مستويها ازدواج عزمه ١٨ نيوتن سم فاتزنت . أوجد ميل القطر $\overline{احـ}$ على الرأس فى وضع التوازن ثم أوجد عزم الازدواج اللازم التأثير به فى نفس مستوى الصفيحة ويجعلها تتزن بشرط أن يميل الضلع $\overline{اب}$ على الرأسى بزاوية °١٥ .

الحــل

نفرض أن $\overrightarrow{ق}$ = م $\overrightarrow{س}$ + ل $\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة ما (ء ، هـ)

$\overrightarrow{جـ}_١$ = $\overrightarrow{او}$ × $\overrightarrow{ق}$ = ١١ $\overrightarrow{ع}$ ومنها ء ل – هـ م = ١١   (١)

$\overrightarrow{جـ}_ب$ = $\overrightarrow{بو}$ × $\overrightarrow{ق}$ = ٥ $\overrightarrow{ع}$ ومنها ء ل – ٢ ل – هـ م + ٢ م = ٥ (٢)

$\overrightarrow{جـ}_حـ$ = $\overrightarrow{حـو}$ × $\overrightarrow{ق}$ = ١٠٠ $\overrightarrow{ع}$ ومنها ء ل – ٦ ل – هـ م + م = ١٠٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)   ∴ م = ٣ ، ل = ٤   ∴ $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$

١٤) سطح أفقى خشن على شكل مربع ا ب حـ ء ، م ملتقى قطريه . وضع جسم وزنه ١٠ ثقل جرام عند م وأثرت عليه قوتان كل منهما تساوى ٥ ثقل جرام فى اتجاه $\overrightarrow{\text{م ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{م حـ}}$ وبقى الجسم متزنا . أوجد الإحتكاك وإذا دار المربع حول $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ بزاوية قدرها ٣٠° فأصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد معامل الإحتكاك .

الحـل

(i) $\overline{ج} = \overline{٠}$ ∴ ... × $\overline{ن}$ = ٠ ومنها م = ٣٠

(ii) المركبة الجبرية = -٣,٤٠

---

١٥) ا ب قضيب مهمل الوزن طوله ٦٠سم معلق من مسمار فى منتصفه . أثرت قوتان عموديتان على القضيب ومتضادتان مقدار كل منهما ١٥ نيوتن فى طرفيه ، كما شد بخيط يميل عليه بزاوية قياسها ٦٠° من نقطة حـ ∈ $\overline{\text{ا ب}}$. أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير القوة التى إذا أثرت على القضيب مع القوى السابقة حفظته فى حالة توازن وهو أفقى إذا كان الشد فى الخيط يساوى ٢٠ نيوتن .

الحـل

(١٥ ، ١٥) يكونان إزدواج عزمه

= ١٥ × ٦٠ = ٩٠٠ نيوتن سم

∴ (٢٠ ، ٢٠) يكونان إزدواج عزمه = -٩٠٠

∴ -٢٠ × س ص = -٩٠٠ ← س ص = ٤٥سم

∴ س م = م ص = ٢٢,٥ سم

∵ $\frac{\text{م ص}}{\text{م ء}}$ = جا ٦٠° ← م ء = ١٥√٣ سم

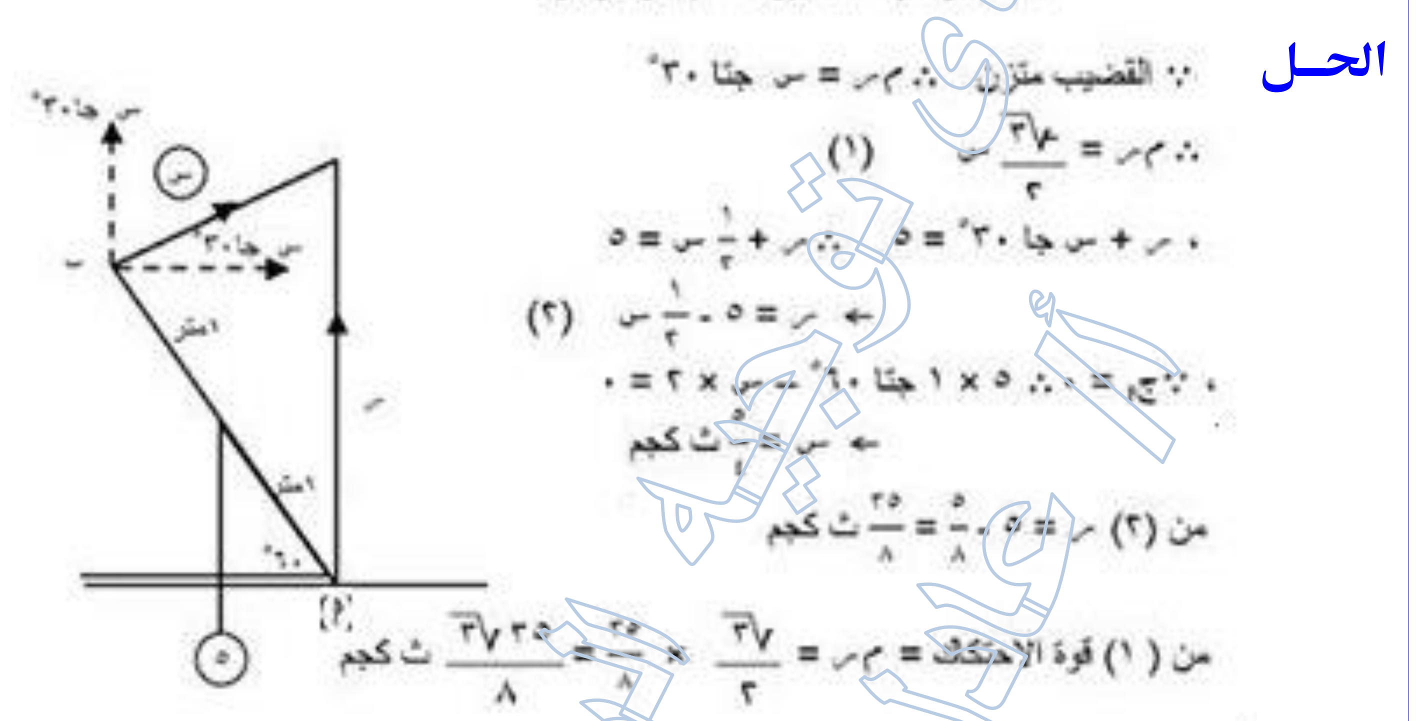
∴ القوة المطلوبة = ٢٠ نيوتن

وتصنع زاوية قياسها ٦٠° وتؤثر فى نقطة ء حيث حـ ء = ٣٠√٣ سم

١٦) قضيب منتظم أب وزنه ٥ ث كجم وطوله ٢ متر يرتكز بطرفه السفلى أ على أرض أفقية خشنة . حفظ القضيب من الانزلاق عندما كان يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° بواسطة خيط ربط أحد طرفيه بنهاية القضيب ب والطرف الأخر للخيط ثبت فى نقطة حـ تقع رأسيا فوق أ بحيث يصنع الخيط مع القضيب زاوية قياسها ٩٠° . أوجد : أولا : مقدار الشد فى الخيط ثانيا : رد فعل الأرض

ثالثا : قوة الإحتكاك بين القضيب والأرض

الحــل



∵ القضيب متزن ∴ م ر = س جتا ٣٠°

∴ م ر = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س (١)

، ر + س جا ٣٠° = ٥ ∴ ر + $\frac{١}{٢}$ س = ٥

← ر = ٥ - $\frac{١}{٢}$ س (٢)

، ∵ جـ أ = ٠ ∴ ٥ × ١ جتا ٦٠° - س × ٢ = ٠

← س = $\frac{٥}{٤}$ ث كجم

من (٢) ر = ٥ - $\frac{٥}{٨}$ = $\frac{٣٥}{٨}$ ث كجم

من (١) قوة الاحتكاك = م ر = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{٣٥}{٨}$ = $\frac{٣٥\sqrt{٣}}{٨}$ ث كجم

---

١٧) قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ٢٤ نيوتن معلق من طرفيه فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين لا يتحمل أى منهما شدا يزيد عن ١٦ نيوتن . أوجد مواضع النقط التى يمكن أن يعلق منها ثقل مقداره ٥ نيوتن دون أن ينقطع أى من الخيطين .

الحــل

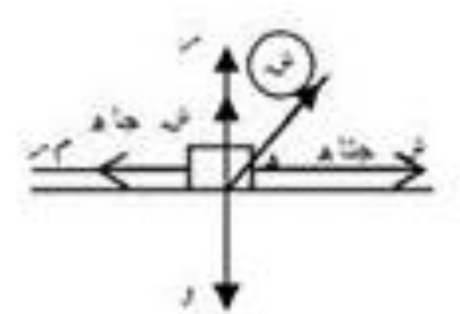
عند وضع الثقل ٥ نيوتن على بعد س من أ يكون الشد فى الخيط وصل الى قيمته العظمى ١٦ نيوتن

، جـ ب = ٠ ← س = ٢٠ سم

أى أنه يوضع الثقل على بعد لا يقل عن ٢٠سم من أى من الطرفين

١٨) وضع جسم وزنه (و) على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى ظا م ثم شد الجسم بحبل فى اتجاه يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فإذا كان الجسم على وشك الحركة . فبرهن على أن الشد فى الحبل يساوى و جا م قا (هـ − م) .

الحـــل



من التوازن : ر + ش جا هـ = و

⟸ ر = و − ش جا هـ (١)

، ش جتا هـ = م ر

من (١) ش جتا هـ = $\frac{\text{جا م}}{\text{جتا م}}$ (و − ش جا هـ)

ش = $\frac{\text{و جا م}}{\text{جتا (هـ − م)}}$ ⟸ ش = و جا م قا (هـ − م)

---

١٩) تؤثر القوى $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ − $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_3$ = ٢$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$ عند النقطة م = (١ ، ١) أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب = (٣ ، −١) ثم احسب طول العمود المرسوم من النقطة ب على خط عمل المحصلة .

الحـــل

(أ) $\overrightarrow{\text{ح}}$ = ٤$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$ ، تؤثر فى م (١ ، ١)

∵ $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب م}}$ × $\overrightarrow{\text{ح}}$ = (−٢$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$) × (٤$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$) = −٢$\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ طول العمود المرسوم من النقطة ب على خط عمل المحصلة

= $\frac{\|\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{ب}}\|}{\|\overrightarrow{\text{ح}}\|}$ = $\frac{٢}{\sqrt{١٦ + ٩}}$ = ٠,٤ وحدة طول

٢٠) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ١٢سم ، ب جـ = ٨سم ، نقطة هـ منتصف $\overline{أب}$ ، أثرت قوى مقاديرها ٣٣ ، ٢٤ ، ٣٠ ، ٣٠ ، ٢٠ ، ٢٥ نيوتن في $\overrightarrow{بأ}$ ، $\overrightarrow{أد}$ ، $\overrightarrow{دهـ}$ ، $\overrightarrow{جـب}$ ، $\overrightarrow{هـجـ}$ على الترتيب . اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه .

الحــل

القوة ٣٣ نيوتن التي تعمل في $\overrightarrow{بأ}$ تكافئ القوتان

١٥ نيوتن في $\overrightarrow{بهـ}$ ، ١٨ نيوتن في $\overrightarrow{هـأ}$

من فيثاغورث د هـ = ١٠سم ، جـ هـ = ١٠سم

∴ القوى المؤثرة في أضلاع المثلث أ هـ د :

$\frac{١٨}{٦} = \frac{٣٠}{١٠} = \frac{٢٤}{٨} = ٣$ أي أن القوى تتناسب مع الأضلاع ،

∵ القوى في اتجاه دوري واحد

∴ المجموعة تكافئ إزدواج عزمه $= ٣ \times ٢ \times \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٦ = ١٤٤$ نيوتن

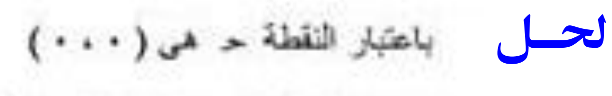
بالمثل القوى المؤثرة في أضلاع المثلث جـ ب هـ :

المجموعة تكافئ إزدواج عزمه $= \frac{٥}{٢} \times ٢ \times \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٦ = ١٢٠$ نيوتن

∴ المجموعة تكافئ إزدواج عزمه $= ١٤٤ + ١٢٠ = ٢٦٤$ نيوتن.سم

٢١) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٣سم ، ب جـ = ٧سم ، م ∈ $\overline{أد}$ بحيث د م = ٤سم . أوجد المسقط الجبري للمتجه $\overrightarrow{جـم}$ على المتجه $\overrightarrow{جـأ}$.

الحــل



باعتبار النقطة جـ هي (٠ ، ٠)

∴ أ = (٧ ، ٣) ، م = (٤ ، ٣)

$\overrightarrow{جـم} = ٤\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{جـأ} = ٧\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$

، جتا هـ $= \frac{\overrightarrow{جـم} \circ \overrightarrow{جـأ}}{جـم \, جـأ}$

جتا هـ $= \frac{(٤\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}) \circ (٧\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص})}{٥ \times \sqrt{٥٨}} = \frac{٣٧}{٥\sqrt{٥٨}}$

∴ مسقط $\overrightarrow{جـم}$ على $\overrightarrow{جـأ}$ = جـم جتا هـ $= ٥ \times \frac{٣٧}{٥\sqrt{٥٨}} = \frac{٣٧}{\sqrt{٥٨}}$ سم

٢٢) أ ب قضيب منتظم وزنه ٦٠٠ ثقل جرام وطوله ٢٠سم يمكنه الدوران بسهولة حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب تبعد ٥سم عن ب . فإذا استند القضيب بطرفه أ على نضد أفقى أملس فبرهن أن رد فعل النضد يساوى ٢٠٠ ثقل جرام ، وإذا شد الطرف ب أفقيا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويا وزن القضيب فأوجد الشد فى الحبل ، علما بأن قياس زاوية ميل القضيب على النضد ٣٠° . وكم يكون رد فعل المسمار ؟

الحـــل فى الحالة الأولى : تم التوازن تحت تأثير ثلاث قوى فقط

∴خطوط عملها إما أن تتوازى أو تتقاطع فى نقطة واحدة ولكن

ر، ، ٦٠٠ ث جم متوازيان ∴ ر، تكون موازية لكل منهما

∴ ر، رأسية لأعلى ∵ جـ، = ٠

∴ ر، × ١٥ × جتا ى − ٦٠٠ × ٥ × جتا ى = ٠ ← ر، = ٢٠٠ ث جم

فى الحالة الثانية : (٦٠٠ ، ٦٠٠) تكونان ازدواج عزمه

= ٦٠٠ × ١٠ جتا ٣٠° = ٣٠٠٠√٣ ث.جم.سم والقوتان ش ، ر

∴ ش ، ر تكونان ازدواج عزمه = − ٣٠٠٠√٣ ث.جم.سم

ش × ٥ جا ٣٠° = ٣٠٠٠√٣ ← ش = ١٢٠٠√٣ ث جم

∴ ر = ١٢٠٠√٣ ث جم

---

٢٣) إذا كان $\overline{أ}$ = ٣$\overline{س}$ + ٢$\overline{ص}$ ، $\overline{ب}$ = ٤$\overline{س}$ + ٥$\overline{ص}$ فأوجد $\overline{أ}$ × $\overline{ب}$ ثم احسب حجم متوازى السطوح القائم الذى قاعدته هي متوازى الأضلاع الذى فيه $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ ضلعين متجاورين وارتفاعه هو وحدة المتجهات العمودية على القاعدة .

الحـــل $\overline{أ}$ × $\overline{ب}$ = (٣$\overline{س}$ + ٢$\overline{ص}$) × (٤$\overline{س}$ + ٥$\overline{ص}$) = ٧$\overline{ع}$

ومعناه الهندسي هو متجه معياره = ضعف مساحة سطح المثلث

الذى ضلعاه طولاهما ‖$\overline{أ}$‖ ، ‖$\overline{ب}$‖

∴حجم متوازى المستطيلات=٢Δ × الارتفاع = ٢×٧×١=١٤ وحدة مكعبة

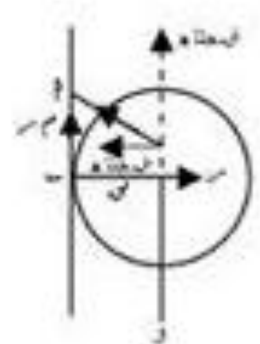
٢٤) كرة معدنية مصمتة متجانسة نصف قطرها نق . ربطت من نقطة على سطحها في خيط وثبت الطرف الأخر للخيط في النقطة ﺃ على حائط رأسي خشن لترتكز الكرة في حالة اتزان وهي على وشك الانزلاق إلى أسفل الحائط عند نقطة ب . فإذا كان ﺃب = $\sqrt{3}$ نق وكان معامل الإحتكاك بين الكرة والحائط $\frac{1}{\sqrt{3}}$. فاثبت أن ظل الزاوية التي يصنعها الخيط مع الحائط يساوي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ مع العلم بأن خط عمل وزن الكرة يؤثر في مركزها .

الحــل

نفرض أن وزن الكرة (و) والخيط يصنع زاوية قياسها (هـ) مع الرأس

من التوازن : ر = ش جا هـ (١) ، ش جتا هـ + م ر = و (٢)

، جـ‍ﺃ = صفر ر × $\sqrt{3}$ نق − و × نق = ٠ ← ر = $\frac{و}{\sqrt{3}}$



من (١) ش جا هـ = $\frac{و}{\sqrt{3}}$ (٣)

من (٢) ∴ ش جتا هـ + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ × $\frac{و}{\sqrt{3}}$ = و

∴ ش جتا هـ = $\frac{2}{3}$ و (٤)

بقسمة (٣) على (٤) ∴ ظا هـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

---

٢٥) جسم وزنه ٥ نيوتن موضوع على مستوى مائل خشن يصنع مع الأفقي زاوية قياسها (ى) وقد وجد أنه إذا أثرت على الجسم قوة قدرها ٣ نيوتن إلى أعلى موازيه لخط أكبر ميل فإنه يكون على وشك الحركة لأعلى المستوى . وإذا أثرت عليه قوة قدرها ٢ نيوتن إلى أعلى موازيه لخط أكبر ميل يكون الجسم على وشك الإنزلاق أوجد :

أولا : ق (∠ى) ثانيا : معامل الاحتكاك

الحــل عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى :

ر = ٥ جتاى ، ق = م ر + ٥ جاى

ومنها ٣ = ٥م جتاى + ٥ جاى (١)

وعندما يكون الجسم على وشك الإنزلاق :

ر = ٥ جتاى ، ق + م ر = ٥ جاى

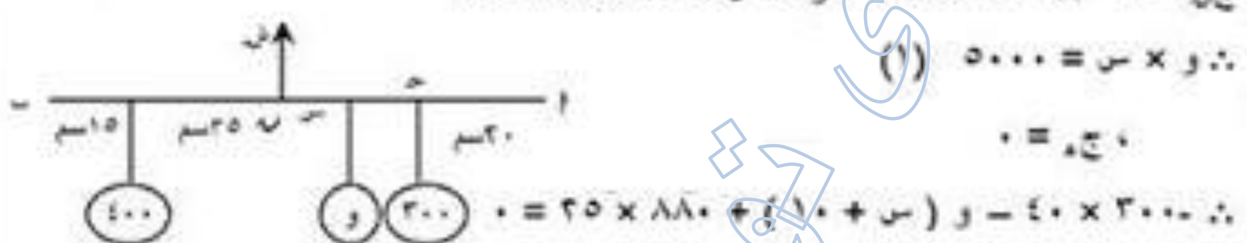
ومنها ٢ + ٥م جتاى = ٥ جاى (٢)

من (١) ، (٢) ق (∠ى) = ٣٠° ، م = $\frac{\sqrt{3}}{15}$

٢٦) أب قضيب غير منتظم طوله متر يتزن من منتصفه إذا علق ثقل قدره ٣٠٠ ث جم من نقطة حـ التي تبعد عن أ بمقدار ٢٠سم وثقل قدره ٤٠٠ ث جم من نقطة ء التي تبعد عن ب بمقدار ١٥سم . وإذا زدنا الثقل عند ء حتى أصبح ٨٨٠ ث جم فإن القضيب يتزن من نقطة تبعد عن ب بمقدار ٤٠سم . أوجد موضع تأثير ثقل القضيب وكذلك مقدار وزنه .

الحــل

$ج_ن = 0$ ∴ ٣٠٠ × ٣٠ – و × س + ٤٠٠ × ٣٥ = ٠



∴ و × س = ٥٠٠٠ (١)

$ج_{ﻫ} = 0$

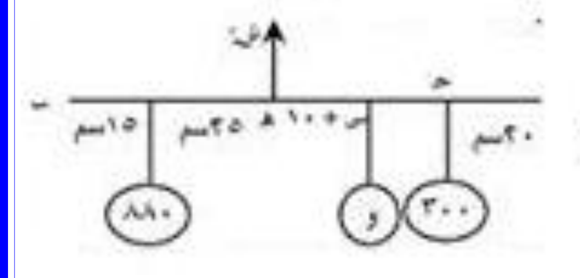
∴ ٣٠٠ × ٤٠ – و (س + ١٠) + ٨٨٠ × ٢٥ = ٠

∴ و (س + ١٠) = ١٠٠٠٠ (٢)

من (١) ، (٢) س = ١٠

أى أن وزن القضيب يبعد عن أ مسافة ٤٠سم من (١)

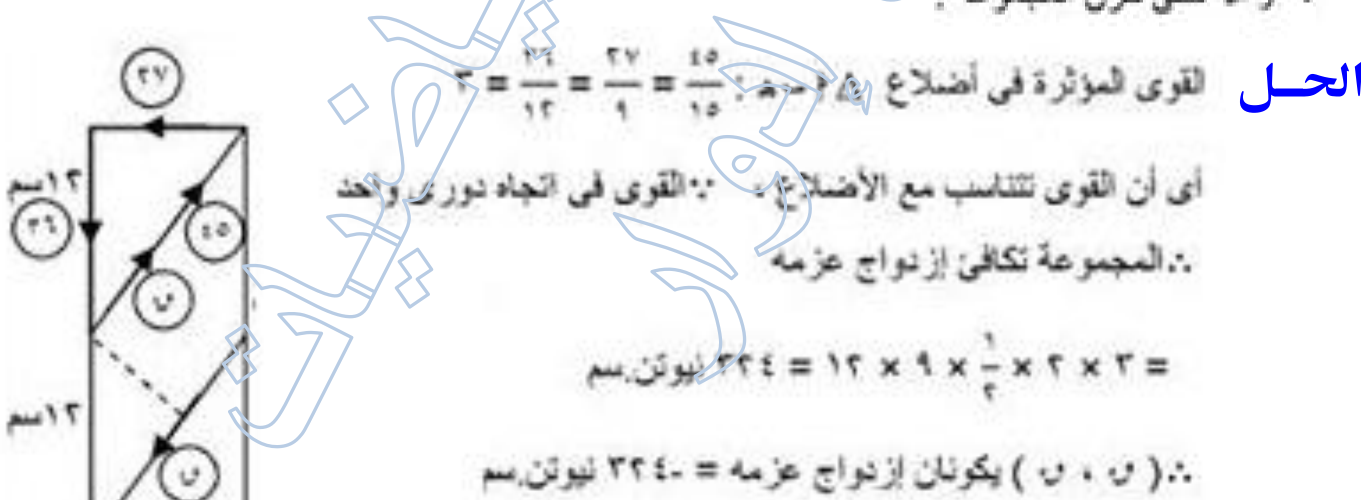
و = ٥٠٠ ث جم



٢٧) أب حـ ء مستطيل فيه أب = ٩سم ، ب حـ = ٢٤سم ، هـ ، و منتصفا ب حـ ، أء على الترتيب . أثرت قوى مقاديرها ٢٧ ، ٣٦ ، ٤٥ نيوتن في أب ، ب هـ ، هـ أ على الترتيب . أوجد القوتين اللتين تؤثران في هـ ء ، و حـ حتى تتزن المجموعة .

الحــل

القوى المؤثرة في أضلاع △ أ ب هـ : $\frac{٤٥}{١٥} = \frac{٢٧}{٩} = \frac{٣٦}{١٢} = ٣$



أى أن القوى تتناسب مع الأضلاع ∵ القوى في اتجاه دوري واحد

∴ المجموعة تكافئ إزدواج عزمه

= ٣ × ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ١٢ = ٣٢٤ نيوتن.سم

∴ (ق ، ق) يكونان إزدواج عزمه = -٣٢٤ نيوتن.سم

∴ ق × ١٢ جا هـ حـ س = -٣٢٤

∴ ق × ١٢ × $\frac{٩}{١٥}$ = ٣٢٤ ∴ ق = ٤٥ نيوتن

٢٨) أ ب قضيب طوله ١٢٠سم يتزن إذا ارتكز طرفه أ على سطح الأرض وارتفع طرفه ب عنها بتأثير قوة مقدارها ٧٢٠ ث جم تؤثر رأسيا إلى أعلى فى نقطة تبعد عن ب بمقدار ٢٠سم ، ويتزن أيضا إذا ارتكز الطرف ب على الأرض وارتفع الطرف أ عنها بتأثير قوة مقدارها ٨٤٠ ث جم تؤثر رأسيا إلى أعلى فى نقطة أ . أوجد ثقل القضيب وعين بعد نقطة تأثيره عن أ .

الحــل

جـ أ = ٠ ∴ و × س جتا هـ − ٧٢٠ × ١٠٠ جتا هـ = ٠

∴ و × س = ٧٢٠ × ١٠٠ (١)

جـ ب = ٠

و × (١٢٠ − س) جتا ى − ٨٤٠ × ١٢٠ جتا ى = ٠

∴ و (١٢٠ − س) = ٨٤٠ × ١٢٠ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ س = ٥٠سم   من (١) و = ١٤٤٠ ث جم

٢٩) ن من القوى المستوية المتوازنة المتساوية مقدار كل منها = ق ، تؤثر فى اتجاه يوازى المحور الصادى وهى بالتتالى متضادة الاتجاه وتؤثر أولها فى الاتجاه الموجب للمحور الصادى وعلى بعد منه = ٢سم وكان البعد بين كل قوة والتالية لها = ٢سم . فإذا كانت ن عددا فرديا فأثبت أن المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول نقطة الأصل يساوى (ن + ١) × ق

الحــل

∵ ن فرديا فإن عدد القوى فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات = $\frac{ن + ١}{٢}$

، عدد القوى فى الاتجاه المضاد = $\frac{ن - ١}{٢}$

جـ و = (ق × ٢ + ق × ٦ + ق × ١٠ + ... إلى $\frac{ن + ١}{٢}$ حدا)

− (ق × ٤ + ق × ٨ + ق × ١٢ + ... إلى $\frac{ن - ١}{٢}$ حدا)

$= \frac{\frac{ن+١}{٢}}{٢} [٢ × ٢ق + (\frac{ن+١}{٢} - ١) × ٤ق] -$

$\frac{\frac{ن-١}{٢}}{٢} [٢ × ٤ق + (\frac{ن-١}{٢} - ١) × ٤ق] = (ن + ١) × ق$

٣٠) أ ب قضيب منتظم طوله متراً يرتكز فى وضع أفقى على حاملين حـ، ء البعد بينهما ٤٠سم (حـ أقرب إلى أ) وإذا علق من أ ثقل قدره ٦ ث كجم فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول حـ ، وإذا علق من ب ثقل قدره واحد ث كجم لأصبح القضيب على وشك الدوران حول ء . أوجد وزن القضيب وبعد كل من الحاملين عن منتصف القضيب .

الحــل

عند وضع الثقل ٦ث كجم من أ يكون القضيب على وشك الدوران حول حـ

∴ $ر_٢$ = صفر ، ٦ (٥٠ – س) = و × س (١)

وعند وضع الثقل ١ ث كجم من الطرف ب

يكون القضيب على وشك الدوران حول ء

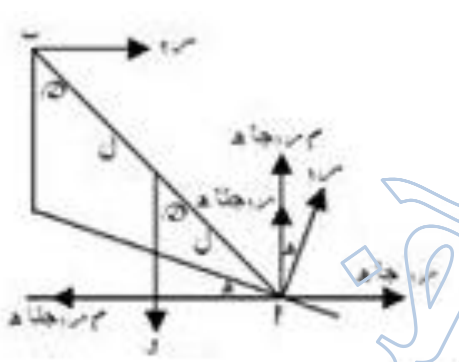
∴ $ر_١$ = ٠ ، ١ (س + ١٠) = و (٤٠ – س)

من (١) ، (٢) س = ٣٠سم أو س = ٨٠سم مرفوض ∴عند س = ٣٠سم

من (١) و = ٤ ث كجم بعد المنتصف عن الوتدين = ٣٠ ، ١٠سم

٣١) ترتكز احدى نهايتى سلم منتظم على حائط رأسى أملس وترتكز النهاية الأخر ب على أرض خشنة تميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإذا كان السلم على وشك الانزلاق فاثبت أنه يميل على الرأسى بزاوية ظلها ٢ ظا (هـ – ى) حيث ى هى قياس زاوية الاحتكاك .

الحــل



من التوازن : $ر_١$ جتا هـ + م$ر_١$ جا هـ = و

∴ و = $ر_١$ (جتا هـ + م جا هـ) (١)

، $ر_٢$ + $ر_١$ جا هـ = م$ر_١$ جتا هـ

∴ $ر_٢$ = $ر_١$ (م جتا هـ – جا هـ) (٢)

، $ج_أ$ = ٠ ∴ و × ل جا θ = $ر_٢$ × ٢ل جتا θ

∴ $\frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta} = \frac{٢ ر_٢}{\text{و}}$

من (١) ، (٢) ظا θ = $\frac{٢ ر_١ (\text{م جتا هـ – جا هـ})}{ر_١ (\text{جتا هـ + م جا هـ})}$

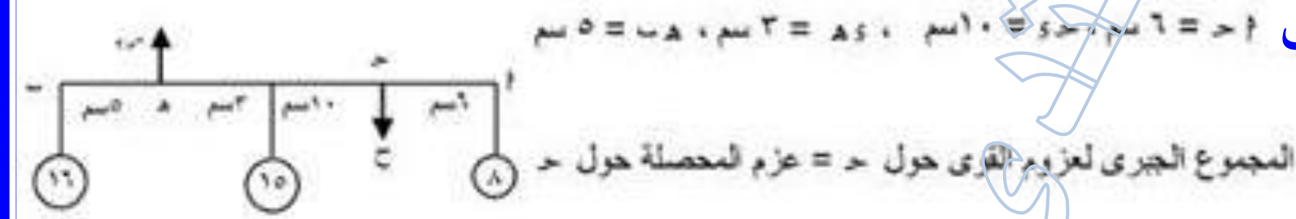
، بالتعويض عن م = ظا ى = $\frac{\text{جا ى}}{\text{جتا ى}}$

∴ظا θ = $\frac{٢\text{جا} (\text{ى – هـ})}{\text{جتا} (\text{ى – هـ})}$ = ٢ ظا (ى – هـ)

٣٢) أ ، ﺟ ، ء ، هـ ، ب خمس نقط تقع على مستقيم واحد بحيث :

٥ أ ﺟ = ٣ ﺟ ء = ١٠ ء هـ = ٦ هـ ب = ٣٠ سم ، أثرت القوى المتوازية والتى مقاديرها ٨ ، ١٥ ، ١٦ ، ق ث جم فى النقط أ ، ء ، ب ، هـ على الترتيب وفى اتجاه عمودى على $\overline{أب}$ بحيث كانت القوى الثلاث الأولى فى اتجاه واحد والقوة ق فى الاتجاه المضاد ، فإذا كانت محصلة هذه القوى تؤثر فى نقطة ﺟ . فأوجد مقدار ق ومقدار المحصلة

الحــل أ ﺟ = ٦ سم ، ﺟ ء = ١٠ سم ، ء هـ = ٣ سم ، هـ ب = ٥ سم



المجموع الجبرى لعزوم القوى حول ﺟ = عزم المحصلة حول ﺟ

∴ ٨ × ٦ + ١٥ × ١٠ − ق × ١٣ + ١٦ × ١٨ = ٠ ⟸ ق = ٣٠ ث جم

∴ ح = (٨ + ١٥ + ١٦) − ٣٠ = ٩ ث جم رأسياً لأسفل

---

٣٣) جسم مقدار وزنه (و) موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ وكانت ق أقل قوة تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى ، اثبت أن أقل مقدار لقوة موازية للمستوى المائل تؤثر على الجسم وتجعله على وشك الحركة إلى أعلى تساوى ق $\sqrt{١ + م^2}$ حيث م معامل الاحتكاك .

الحــل ر + ق جا ل = و جتا هـ ⟸ ر = و جتا هـ − ق جا ل (١)

∴ ق جتا ل = م ر + و جا هـ ∵ م = ظا ى = $\frac{جا ى}{جتا ى}$

من (١) ق جتا ل = $\frac{جا ى}{جتا ى}$ (و جتا هـ − ق جا ل) + و جا هـ

⟸ ق = $\frac{و جا (هـ + ى)}{جتا (ل − ى)}$

ويكون أقل قوة عندما يكون جتا (ل − ى) أكبر ما يمكن أى جتا (ل − ى) = ١

أى ل = ى مقدار أقل قوة = و جا (هـ + ى) (٣) ر = و جتا هـ (٤)

∴ ق' = م ر + و جا هـ من (٤) ق' = و × $\frac{جا ى}{جتا ى}$ جتا هـ + و جا هـ

∴ ق' = $\frac{و جا (هـ + ى)}{جتا ى}$ من (٣) ق' = $\frac{ق}{جتا ى}$ = $\frac{ق}{\frac{١}{\sqrt{١ + م^2}}}$

⟸ ق' = ق $\sqrt{١ + م^2}$

٣٤) أ ب حـ ء شبه منحرف فيه أ ب = ١٢سم ، ب حـ = ١٨سم ، أ ء = ٩سم ، $\overline{أء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق (∠ ب) = ٩٠°

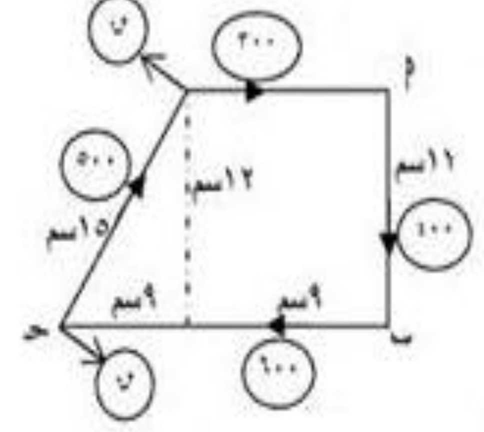
أثرت قوى مقاديرها ٤٠٠ ، ٦٠٠ ، ٥٠٠ ، ٣٠٠ ثقل جرام فى $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ ، $\overrightarrow{ء أ}$ على الترتيب

اثبت أن مجموعة القوى تكافئ إزدواجا ، وأوجد معيار عزمه وأوجد القوتين اللتين تؤثران عند حـ ، ء

والعموديتين على $\overline{حـ ء}$ بحيث تصبح المجموعة فى حالة توازن .

الحــل

$∵ \frac{٤٠٠}{١٢} = \frac{٦٠٠}{١٨} = \frac{٥٠٠}{١٥} = \frac{٣٠٠}{٩} = \frac{١٠٠}{٣}$



أى أن القوى تتناسب مع الأضلاع ، ∵القوى فى اتجاه وردى واحد

∴المجموعة تكافئ إزدواج عزمه

$= \frac{١٠٠-}{٣} \times \frac{١}{٢} (٩ + ١٨) \times ١٢ = -١٠٨٠٠$ ث جم.سم

∴المجموعة تكافئ إزدواج المعيار عزمه = ١٠٨٠٠ ث جم.سم

لكى تتزن المجموعة ∴(ق ، ق) تكونان إزدواج عزمه = ١٠٨٠٠

∴ق × ١٥ = ١٠٨٠٠ ← ق = ٧٢٠ ث.جم

أنتهت الأسئلة

مع كل تمنياتى لكم بالنجاح والتفوق

مع تحيات أسرة توجيه الرياضيات